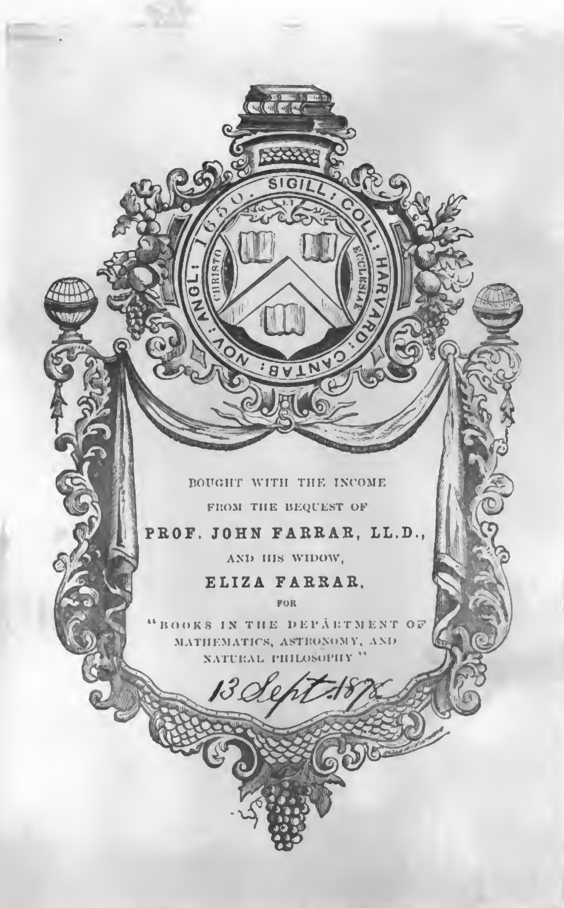
DIE RÖMISCHEN AGRIMENSOREN UND IHRE STELLUNG IN DER GESCHICHTE DER...

Moritz Cantor




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
13 Sept. 1875

DIE

RÖMISCHEN AGRIMENSOREN

UND IHRE STELLUNG

IN DER

GESCHICHTE DER FELDMESSKUNST.

EINE

HISTORISCH-MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG

VON

DR. MORITZ CANTOR.



MIT 5 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

Einleitung.

Dass seit etwa 25 Jahren, seit der Mitte unseres Jahrhunderts, die geschichtliche Behandlung der Mathematik sich einen umfangreichen Kreis von Mitarbeitern, einen umfangreicheren von Freunden gewonnen habe, wer könnte diese unserer Meinung nach höchst erfreuliche Thatsache leugnen? In Abhandlungen einzelner Zeitschriften, in Programmarbeiten, in Monographien, in Büchern und in Vorlesungen über Geschichte der Mathematik bethätigt sich das immer regere Interesse, und in gleichem Maasse wie von Schulen und Universitäten her neue Kräfte zum alten Baue in Wirksamkeit traten, mehrten sich auch die Ergebnisse gründlicher Forschung, nicht überall gleich gesichert, nicht in allen ihren Theilen gleich widerspruchslos angenommen, aber stets ein wahrer Gewinn für die Wissenschaft, und vielleicht grade in den Fällen der schätzenswertheste, wo über das Aufgefundene ein Streit sich entspann. Wie die Funken um so lebhafter sprühen, je heftiger die Schwerter an einander schlagen, so verbreitete sich nicht selten das glänzendste Licht über irgend einen vorher dunkeln Gegenstand durch den Kampf der Meinungen, durch das Bemühen jeder wissenschaftlichen Partei neue Gründe für ihre Ansichten beizubringen. Wie Vieles hat sich in der That seit der genannten Spanne Zeit geklärt und aufgehellt! Die Abhängigkeit der griechischen Mathematik von aussergriechischer und vorgriechischer Wissenschaft, die mehr als bloss erhaltende Thätigkeit der Araber, die in der Dürre des Mittelalters nicht so gänzlich, wie man lange annahm, versiegende Welle mathematischer Strömungen, diese und viele ähnliche Behauptungen bieten höchstens noch dem Grade nach strittige

Punkte, während der Grundgedanke derselben von allen wissenschaftlichen Richtungen gleichmässig anerkannt wird, anerkannt zugleich was aus allen diesen Ergebnissen als Kern sich herausschält: die Stetigkeit der Wissenschaft, insbesondere der Mathematik.

Um eines oft wiederholten, auch von uns in früherer Zeit schon gebrauchten Bildes uns zu bedienen: es giebt nur ein Hauptstromgebiet geistiger Entwicklung, im Grossen und Ganzen von Süden und Osten nach Norden und Westen sich abdachend, überall auch in scheinbar wüstesten Gegenden neue Zuflüsse erhaltend und in sich aufnehmend, wie überall erquickende und befruchtende Niederschläge veranlassend. Dass dieses Stromgebiet aus vielerlei Einzelgewässern sich zusammensetzt, die in nebeneinander gebildeten Flussbetten rinnen, dass zwischen den gleichlaufenden Senkungen Querverbindungen nicht aller Orten bemerklich sind, das giebt der Untersuchung nur einen erhöhten Reiz und macht es möglich demselben grossen Zwecke der Klarlegung des ganzen Verlaufs zu dienen, ohne stets dieselben Wege zu wandern.

Der Verfasser dieser Schrift beabsichtigt auch heute an einem besonderen Theile der mathematischen Wissenschaften nachzuweisen, wie der Entwicklung eines Volkes die eines zweiten vorherging, die eines dritten folgte, wie Manches unterwegs verloren ging, Anderes dafür eintrat, wie vielleicht nicht selten das Vollkommnere für eine Zeit lang dem Unvollkommneren den Platz räumte, wie aber eine eigentliche, vollständige Stetigkeitsunterbrechung kaum jemals nachzuweisen ist.

Wir haben als Titel dieses Büchleins die Stellung der römischen Agrimensoren in der Geschichte der Feldmesskunst gewählt. Wir wollen diesen Titel nicht grade als mit dem Inhalte unbedingt sich deckend vertheidigen. Die römischen Feldmesser werden einen räumlichen Haupttheil zu bilden haben; ihre Werke werden vollständiger, als es bisher geschehen ist, in dem mittleren Abschnitte behandelt werden. Auf sie hinweisen wird was vorhergeht, von ihnen abhängig gemacht werden was nachfolgt. Aber wir verwahren uns jetzt schon gegen einen allzu beengenden Zwang, den der Titel uns nach der Meinung dieses

oder jenes Lesers vielleicht auferlegen müsste. Wir glaubten Abschweifungen nach den verschiedensten Seiten hin uns gestatten zu dürfen, und hoffen für solche die hiermit im Voraus erbetene Vergebung zu erhalten. Haben doch, wie die Erfahrung uns gelehrt hat, die Leser unserer früheren Versuche auf benachbarten Gebieten die gleiche Sünde uns verziehen, der wir regelmässig verfielen.

Auch in zwei anderen Beziehungen verharren wir in früheren Gewohnheiten. Wir haben den gesammten Vorrath an wissenschaftlichen Belegen den Anmerkungen zugewiesen, welche vereint am Schlusse des Ganzen sich abgedruckt finden. Wir haben gesucht in der Darstellung selbst so allgemein verständlich zu sein, als der Gegenstand es überhaupt zuliess, selbst figürliche Redeweisen und Bilder nicht verschmähend, wo sie den Kern des zu Entwickelnden nach unserem Dafürhalten körperlicher hervortreten liessen, als dieses unter alleiniger Anwendung einer trockneren, vielleicht gelehrter klingenden Sprache möglich gewesen wäre.

Die römischen Feldmesser also sollen in der hier vorbehaltenen Ausdehnung des Begriffes den Mittelpunkt unserer Darstellung bilden. Wir beabsichtigen vorauszuschicken einen Abschnitt über jenen merkwürdigen Mann, welcher um das Jahr 100 vor Christi Geburt der ganzen bisherigen egyptisch-griechischen Lehre von der Feldmessung einen abrundenden Abschluss gab, über Heron von Alexandrien. Wir wollen hierauf zeigen, wie Alles, was auf römischem Boden der Wissenschaft der Feldmessung angehört, die wir von der Kunst der Feldmessung streng unterscheiden werden, aus griechischen Quellen, und vor Allen aus heronischen Schriften geschöpft ist. Wir wollen weiter den Nachweis führen, wie diese romanisirte griechische Wissenschaft dem Mittelalter wieder als Quelle diente, und wie ganz besonders eine ganz bestimmte Sammlung römischer Schriftsteller viele Jahrhunderte erst unmittelbar, dann mittelbar beeinflusste.

Besitzt nun eine Monographie des Inhaltes, wie wir ihn eben in kürzesten Worten geschildert haben, eine innere Berechtigung? Wir glauben es. Wir sind zwar auf den Einwand vorbereitet, es sei kein neuer Gedanke, welchen wir ausgesprochen, keine neue Aufgabe, welche wir uns gestellt

hahen. Aber die Wahrheit ist nur eine, sie darf daher kühn auf die Eigenschaft der Neuheit verzichten, und dass die Aufgabe: im Besonderen nachzuweisen, was jener allgemeine Satz behauptete, schon gestellt wurde, ja dass sie, wie wir noch hinzufügen wollen, theilweise schon gelöst worden ist, schliesst nicht aus, dass die vollständige Lösung auch heute noch erwartet werde. Niemand ist derselben so nahe gekommen, wie Fr. Hultsch, der an verschiedenen Orten, zuletzt in dem 1872 im Drucke erschienenen, 16 Spalten der Ersch und Gruber'schen Encyklopädie füllenden Artikel „Gromatici“ eine nach seinem eigenen Eingeständnisse zwar noch nicht Alles erschöpfende, aber, wie wir in halbem Gegensatze zu diesem Selbstbekenntnisse uns zu bemerken erlauben, Fernblicke nach allen Seiten eröffnende Sichtung des Stoffes vorgenommen hat. Wäre uns dieser Artikel bekannt gewesen, bevor wir unsere eigene Untersuchungen begonnen, wir hätten vermuthlich uns mit Hultsch's Ergebnissen begnügt, ihm überlassend das zu vollenden, was er so schön begonnen. Allein durch Zufall, durch Versäumniss von unserer Seite nachzuschauen, ob in einem ein neueres Datum tragenden Bande jener Encyklopädie sich über die Feldmessung der Alten Etwas finden lasse, lernten wir jene Abhandlung erst am Spätesten von allen benutzten Schriften kennen, erst als wir mit den Vorarbeiten zu unserem Büchlein vollständig abgeschlossen hatten, aufmerksam gemacht durch briefliche Mittheilung von Seiten des Verfassers. Wir denken hierin eine genügende Rechtfertigung dafür zu besitzen, dass wir gewissermassen auf fremdem Boden wildern gingen, ohne die Genehmigung des Eigenthümers einzuholen; wussten wir doch nicht, bis zu welchem Grade der Jagdgrund schon seinen Herrn gefunden hatte. Wir denken aber auch so Mancherlei zu Hultsch's Ergebnissen hinzuzufügen und daraus eine weitere Berechtigung dafür entnehmen zu können, dass wir unsere Arbeit der Oeffentlichkeit übergeben. Vor allen Dingen dürfte neu hinzutreten, was auf die Zeit nach den römischen Feldmessern sich bezieht. Dann aber möchte, wie schon der Umfang unserer beiderseitigen Schriften verräth, doch auch für die Römer selbst unsere Zusammenstellung die umfassendere sein, manche

Dinge und Schriftsteller berührend, an welchen Hultsch in einem Beitrage zu einem encyklopädischen Werke vorbeigehen durfte, wenn nicht gar vorbeigehen musste. Wir waren ferner in der Lage für unsere Arbeit einiges handschriftliche Material zu verwerthen, welches wenigstens von eigentlichen Mathematikern nie benutzt worden war; auch aus diesen Fundgruben können wir Neues in Aussicht stellen.

Eine angenehme Pflicht bleibt uns namentlich mit Hinsicht auf die letzterwähnten Quellenschriften in dieser Einleitung zu erfüllen. Wir müssen unsern wärmsten Dank den Bibliotheksvorständen aussprechen, durch deren Liebenswürdigkeit es uns gestattet war, die Schätze ihrer Sammlungen in umfassender Weise zu benutzen, sei es am Orte, wo jene Sammlungen sich befinden, sei es sogar hier in Heidelberg durch bereitwillige Uebersendung der Handschriften. Die Herren Vorsteher der Bibliotheken von Wolfenbüttel, von Karlsruhe, vom St. Petersstifte in Salzburg mögen in diese gemeinschaftliche Dankesergiessung sich freundlich theilen Sie mögen aber auch, ohne eine Zurücksetzung dessen darin zu finden, was wir ihnen schulden, eine besondere Anerkennung eines Mannes uns gestatten, der uns vor Allen zu Dank verpflichtet hat. Die unermüdliche Gefälligkeit, wie die gelehrte Beihülfe des Oberbibliothekars der Heidelberger Universitätsbibliothek, Herr Prof. Dr. Zangemeister, sei es zur Beischaffung und zur Bestimmung des Alters der benutzten handschriftlichen Quellen, sei es zur Auffindung weiterer gedruckter Hülfsschriften, hat sich während des ganzen Verlaufes unserer Arbeit nie verleugnet, und es ist nur seine eigene Schuld, wenn ihm in dieser Schrift Manches recht wohl bekannt erscheinen wird, worüber wir schon während der Ausarbeitung uns mit ihm in Besprechungen ergehen durften, die niemals ohne Nutzen für uns waren.

Abschnitt I.

Heron von Alexandrien.

Unter den Fragen, welche dem Geschichtsforscher der exakten Wissenschaften sich gradezu aufdrängen mussten, nahm lange Zeit die sogenannte Heronische Frage eine widrige Stellung ein. Wie um ein geschlossenes Gebäude herum bewegte man sich in stetem Kreise ohne in das Innere dringen zu können, ohne Schlüssel, ja fast ohne Kenntniss der Thüre, welche mittelst jenes Schlüssels geöffnet werden musste, wenn man so glücklich war, ihn zu entdecken. Einem italienischen Gelehrten, Venturi, war es endlich am Anfange dieses Jahrhunderts, 1814, beschieden, die richtige Spur zu ermitteln; allein die Seltenheit des Werkes[1]), in welchem er seine Forschungen veröffentlichte, ausserhalb seiner Heimath, die kaum geringere Seltenheit von Männern, welche innerhalb derselben solchen Studien sich zuwandten, bevor unter dem wohlthätigen Einflusse des Prinzen Baldassare Boncompagni neues Interesse eine neue Schule erzeugte, diese beiden Umstände vereinigt liessen die heronische Frage, wiewohl der Hauptsache nach beantwortet, als ungelöst fortbestehen. Ist es doch nur auf diese Weise begreiflich, dass Letronne, welcher mit einer umfassenden Arbeit den Preis sich errang, den die historisch-philologische Abtheilung der Pariser Akademie auf Bearbeitung der Aufgabe: *Expliquer le système métrique d'Héron d'Alexandrie et en déterminer les rapports avec les autres mesures de longueurs des anciens* im Jahre 1816 ausschrieb, mit Veröffentlichung seiner gekrönten Abhandlung so lange zurückhielt, bis er darüber wegstarb und erst Vincent im Jahre 1851 die nachgelassene Schrift[2]) dem Drucke übergab, Untersuchungen von immerhin grossem Werthe, aber ohne Berücksichtigung Venturi's angestellt und in der durchaus falschen Behauptung gipfelnd, der Verfasser der meisten als heronisch überlieferten Bruchstücke sei Heron von Alexandrien, der Lehrer des Proklus Diadochus, welcher demgemäss zwischen 430 und 440 seine Blüthezeit haben musste. Unbeirrt durch die Autorität Letronne's unternahm es dessen gelehrter Lands-

mann Henri Th. Martin von Neuem, an eine Prüfung der ganzen Frage heranzugehen, und seine Bemühungen waren vom glänzendsten Erfolge begleitet. Die *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie disciple de Ctésibius et sur tous les ouvrages mathématiques Grecs conservés ou perdus, publiés ou inédits, qui ont été attribués à un auteur nommé Héron*[3]) sind von klassischem Werthe, und man wird ihrem Verfasser den Ruhm nicht nehmen wollen noch können, die heronische Frage in ihrem ganzen Umfange richtig gestellt und richtig beantwortet zu haben, selbst nachdem Vincent[4]) in Frankreich, Hultsch[5]), Valentin Rose[6]) und Friedlein[7]) in Deutschland die Ergebnisse Martin's in einzelnen Punkten ergänzt oder widerlegt haben. Sind wir doch überzeugt, dass grade die Männer, welchen die hier erwähnte Ausfeilung zum Verdienst gereicht, am Innigsten von dem Werthe der Martin'schen Arbeit durchdrungen waren und sind.

Die sogenannte heronische Frage besteht nun in Folgendem: Es giebt eine ganze Anzahl mechanischer und geometrischer Werke, welche in den Handschriften einem Heron als Verfasser zugewiesen werden. Andrerseits ist der Name Heron ein so verbreiteter, dass nicht weniger als 21 Persönlichkeiten aus dem Alterthume aufgezählt werden, denen er zukommt. Welcher Heron ist nun der Verfasser jeder einzelnen Schrift, d. h. genau genommen: welcher Zeit dürfen wir die Kenntnisse zuschreiben, von welchen in den einzelnen Schriften Gebrauch gemacht ist?

Schon seit längerer Zeit hatte man so viele Heron genannte Persönlichkeiten als nicht in Frage stehend ausgeschieden, dass es sich in letzter Linie nur noch um drei Träger des Namens handelte: Heron der Aeltere, Heron der Lehrer des Proklus und ein ganz später Schriftsteller, dessen Heimath Byzanz durch Martin festgestellt, dessen Name Heron durch Vincent in gerechten Zweifel gezogen wurde[8]), so dass man heute nur noch von einem sogenannten Heron von Byzanz zu reden berechtigt ist und jedenfalls den Namen Heron des Jüngeren um so vollständiger aufgeben muss, als so lange der letztere Name in

Uebung war, ganz irrige Ansichten über die Lebenszeit dieses Schriftstellers galten.

Das Zeitalter des zweiten Heron konnte, wie bereits oben gesagt, bei den durchweg gesicherten Lebensverhältnissen seines Schülers einem Zweifel niemals unterworfen sein. Um so fraglicher ist es, ob derselbe überhaupt jemals mathemathische Schriften verfasst hat, und gradezu als unwahrscheinlich, wenn nicht als unmöglich ist es zu bezeichnen, dass ihm solche Werke angehören sollten, welche ganz oder wenigstens der Ueberschrift nach bis auf uns gekommen sind, man müsste denn in ihm eine und dieselbe Persönlichkeit mit einem durchaus ungewissen Heronas erkennen wollen, der nach dem Berichte des Eutokius einen Commentar zum Nikomachus schrieb, also jedenfalls zwischen das II. und VI. S. zu setzen ist. Der dritte Schriftsteller, der sogenannte Heron von Byzanz, muss, wie Martin bewiesen hat, um 938 gelebt haben, kann also unmöglich der Verfasser von Schriften sein, welche bei Pappus, bei Proklus, bei Eutokius oder bei Columella, bei Nipsus, bei Epaphroditus, bei Boetius und anderen Schriftstellern vor dem X. S., sei es Erwähnung finden, sei es in unzweideutigen Spuren sich wiedererkennen lassen. So bleibt als Hauptſchriftsteller nur ein einziger übrig: Heron der Aeltere.

Die Nachrichten über diesen geistig hervorragenden Mann fliessen zwar etwas dürftig, indessen lässt sich aus denselben doch Mancherlei mit Bestimmtheit entnehmen. Erstlich steht seine Heimath Alexandrien fest, indem er sowohl in der Ueberschrift einiger Werke als Heron von Alexandrien bezeichnet ist[9]), als ihm auch einmal Pappus[10]) und einmal Heron von Byzanz[11]) diese nähere Benennung beilegt. Zweitens wissen wir aus der zuletzt genannten Stelle des Heron von Byzanz, dass der Lehrer des Heron von Alexandrien Ktesibius von Askra gewesen ist, und damit stimmt wieder eine Ueberschrift[12]) überein, die von einem „Heron des Ktesibius" spricht, eine Verbindung zweier Namen, welche, wie schon Baldi und Lambecius gezeigt haben, nicht bloss dem Verhältnisse von Sohn und Vater, sondern auch dem von Schüler und Lehrer entspricht[13]). Damit ist aber drittens auch die Lebenszeit des Heron von Alexandrien

annähernd gegeben. Ktesibius von Askra[14]) war nämlich Sohn eines Bartscheerers, zuerst in dem Gewerbe seines Vaters erzogen, später ein berühmter Mathematiker in Alexandrien, wo er unter Ptolemäus Euergetes II. (oder wie derselbe Fürst sonst wohl genannt wird: Ptolemäus IX. Physkon, d. h. Schmeerbauch) blühte, und dessen Regierungszeit geht von 170 bis 117. Darnach kann die Wirksamkeit des Heron von Alexandrien nicht früher angesetzt werden als etwa auf das Jahr 100 vor Chr. Geb., ein oder zwei Jahrzehnte nach aufwärts oder abwärts als Grenzen seines Lebens freigegeben. Martin will ihn noch einige Zeit später hinabrücken[15]), weil in der Dioptrik Alexandrien und Rom als Standpunkte zweier Beobachter angenommen einen innigeren politischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Städten vermuthen lassen, als z. B. zwischen Alexandrien und Athen. Nun sei Ptolemäus XIII. Neos Dionysos der erste egyptische König, welcher 81 v. Chr. durch die Römer eingesetzt wurde, von da an beginne es etwa, dass alle Augen in Alexandrien ausschliesslich auf Rom gerichtet waren, und somit sei die Dioptrik nicht vor dem Jahre 80 geschrieben, eine Schlussfolgerung, welcher wir in dieser Beschränkung uns anschliessen, während wir mit Hultsch[16]) wenig geneigt sind, die Lebenszeit des Heron von Alexandrien bis zum Schlusse der Regierung des Ptolemäus Neos Dionysos, also bis etwa zu dem Jahre 50 auszudehnen. Noch ein dritter Name ist es, unter welchem dieser ältere Heron vorkommt: Heron der Mechaniker. Martin irrt zwar, wenn er, verleitet durch die Uebersetzung des Commandinus, diese Bezeichnung bei Pappus gefunden haben will[17]), allein bei Proklus ist sie wiederholt vorhanden und kann nach der stylistischen Gewohnheit dieses Schriftstellers, auf die bei anderer Gelegenheit hingewiesen worden ist, auf Niemand anders Bezug haben als auf den Heron, welcher an einer früheren Stelle zusammen mit Ktesibius als Erfinder wunderbarer, auf Luftdruck beruhender Mechanismen erwähnt wird, und derselbe Heron muss auch gemeint sein, wo an drei anderen Stellen der Name schlechtweg sich findet[18]). Allerdings ist die Bezeichnung: „Heron der Mechaniker“ keine so scharfe, wie wir sie sonst bei

Proklus anzutreffen pflegen, allein grade dieser Umstand lässt sich vielleicht noch als Bestätigung dafür verwerthen, dass ein Missverständniss unmöglich gewesen sein muss, dass es vor Proklus nur einen mathematischen Schriftsteller Heron gegeben haben kann, und eben zu dieser Folgerung kann die Gewohnheit des Pappus uns leiten, der meistens einfach von Heron redet als von einem allbekannten, ebendazu ein Citat in des Eutokius Erläuterungen zum 3. Satze der Archimedischen Kreismessung, wo es auch Heron schlechtweg heisst, ebendazu Citate bei Heron von Byzanz, der nur einen Heron gekannt zu haben scheint.

Freilich nimmt die Einfachheit, zu welcher die ehedem so verwickelte Frage sich aufgelöst zu haben scheint, in bedenklichem Grade wieder ab, sobald wir die sämmtlichen mechanischen und mathematischen Schriften, welche unter dem Autorennamen eines Heron uns erhalten sind, soweit sie nicht von jenem sogenannten Heron von Byzanz herrühren, auf unseren Heron von Alexandrien, auf das Jahr 100 v. Chr. zurückführen wollen. Martin hat in noch unwiderlegter und vermuthlich unwiderlegbarer Weise gezeigt, dass das Griechische und die Maasse in einzelnen solchen Werken einem viel späteren Zeitalter angehören[19]). Er hat ebenso in hohem Grade wahrscheinlich gemacht, dass zwei Schriftsteller, welche in derartigen Büchern genannt werden, Modestus und Patrikius am Ende des IV. S. nach Chr. gelebt haben[20]). Zu ähnlichen Folgerungen kommt Hultsch in den Prolegomenen zum ersten Theile seiner Ausgabe alter Metrologen. Wo bleibt solchen wuchtigen Einwürfen gegenüber das ganze kaum aufgeführte und bereits vom Umsturz bedrohte Gebäude?

Es ist nur ein Mittel zur Erklärung übrig, zu welchem auch alle neueren Forscher einmüthig ihre Zuflucht genommen haben, und welches in folgender Annahme besteht: Allerdings sind die vor dem X. S. entstandenen heronischen Schriften wesentlich auf Heron von Alexandrien zurückzuführen, allein bei der ungemeinen praktischen Wichtigkeit dieser Schriften sind zu verschiedenen Zeiten Copien, theilweise auch nur Auszüge aus denselben entstanden, in welche der Verfertiger jeweils anderweitige Notizen mit einfügte,

mochte er sie haben woher er wollte, wie es ja auch heutigen Gelehrten nicht grade ungewohnt ist, zu ihren Excerpten aus alten Schriftstellern wenigstens am Rande Bemerkungen niederzulegen, welche sich ihnen beim Studium jener Werke ergaben. Die eigentlichen Originalhandschriften sind nun um so regelmässiger, als der Verfasser in weiter zurückliegenden Zeiten lebte, und so auch von unserem Heron, verloren gegangen. Leider aber haben sich in diesem Falle nur solche Exemplare von später Hand erhalten, welche sich als entstellt und verschlimmbessert erweisen durch Auslassungen und Zusätze, deren Entstehung wir erörterten, und welche mehr und mehr vom Rande in den eigentlichen Text hinüberdrangen. Schlimm genug, wenn auch nicht ganz an die drei falschen Ringe aus Lessings Nathan erinnernd, die von dem verloren gegangenen echten Ringe nur die Gestalt, aber keine seiner inneren Eigenschaften besassen.

Die innere Wahrheit mancher heronischen Schriften, d. h. ihre ausgeprägte regelmässige Form, der Gleichlaut mancher in verschiedenen Sammlungen enthaltenen Sätze, die geistvolle Ueberlegenheit über den umgebenden Wust zeugen für ihre Echtheit, und für Manches aus jenem Wuste, welches nun und nimmer Heron's Eigenthum sein kann, ist mindestens eine verhältnissmässige Gleichaltrigkeit nachzuweisen durch sichere Anklänge in altegyptischen Schriften, wie bei Römern seit dem Anfange der christlichen Zeitrechnung, also durch vorheronische wie nachheronische Uebung.

Die Aufgabe, welche wir nun im Folgenden uns stellen, lässt sich dahin fassen: mit Rücksicht auf die noch vorhandenen Schriften, sowie auf die einst mit Sicherheit vorhanden gewesenen ein zwar weitaus nicht vollständiges, aber immerhin erkennbares Bild des Mannes uns zu verschaffen, dessen Name die Ueberschrift dieses Abschnittes bildet. Hat auch Martin für seine Zeit in erschöpfender Weise die gleiche Aufgabe gelöst, so möge man nicht vergessen, dass, wie wir oben berichteten, doch Manches inzwischen noch hinzu entdeckt wurde, und dass Martins umfangreiche Untersuchung zu dem Zwecke der Rückverweisung, den wir hier

zumeist, wenn auch nicht einzig, im Auge haben, weniger sich eignet als eine kürzere Zusammenstellung.

An der Spitze der Leistungen des Gelehrten, der von Proklus als Mechaniker mit besonderer Betonung dieses Namens bezeichnet wird, den der heilige Gregor von Nazianz mit Euklid und Ptolemäus zusammen als die drei mathematischen Grössen der Griechen nennt, ihn dadurch zum Vertreter der Mechanik stempelnd, wie jene beiden Anderen Geometrie und Astronomie in sich verkörpern, würde unbedingt sein Werk über die Mechanik, wahrscheinlich über die Mechanik fester Körper insbesondere, gehören, wenn uns dasselbe erhalten wäre. Leider aber sind es nur geringe Spuren der Mechanik des Heron, welche wir Pappus' Sammlung entnehmen können[21]). Von einem anderen theoretisch-mechanischen Werke, welches den Titel des „Gewichteziehers“ führte, ist wenigstens ein Kapitel und zwar doppelt erhalten an zwei Orten auf uns gekommen, grade genug, um das lebhafteste Bedauern darüber wachzurufen, dass das Uebrige verloren gehen musste[22]). Inhalt des Werkchens war die Auflösung der von Archimed gestellten Aufgabe: eine gegebene Last mittelst einer gegebenen Kraft in Bewegung zu setzen unter Anwendung der fünf wichtigsten Maschinen, des Keils, des Hebels, der Schraube, des Flaschenzuges und des Rades an der Welle.

Heron hat sich aber, und das bildet gradezu seine wissenschaftliche Eigenthümlichkeit, niemals mit blossen theoretischen Auseinandersetzungen begnügt. Auch in der Mechanik fester Körper schritt er von der wissenschaftlichen Grundlage aus weiter zur Anwendung, und wieder zeigt sich eine andere Eigenthümlichkeit unseres Schriftstellers darin, dass die Anwendung eine doppelte ist, dass neben dem Nutzen für die menschliche Gesellschaft auch das Vergnügen des Einzelnen ihm werth erscheint die geistige Fürsorge des Gelehrten in Anspruch zu nehmen. Heron's Schriften über angewandte Mechanik finden sich bis jetzt hauptsächlich in einem Sammelwerke alter mathematischer Schriften, welches 1693 von Thevenot herausgegeben[9]), gegenwärtig fast zu den bibliographischen Seltenheiten gehört. Neben der ungenügenden Verbreitung trägt aber auch die ganz entsetz-

liche Druckart mit allen möglichen und unmöglichen Abbreviaturen, welche dem heutigen Leser, so weit er nicht griechischer Philologe von Fach ist, die grössten Schwierigkeiten bereiten, das Ihrige dazu bei, dass diese Schriften noch immer nicht so bekannt sind, wie sie es zu sein verdienen, und sicherlich würde der Herausgeber sich wahrhaft verdient machen, der entweder die Thevenot'sche Sammlung vermehrt und verbessert, oder wenigstens die heronischen Schriften, so weit sie in der von Hultsch[5]) besorgten Ausgabe noch nicht vorhanden sind, neu abgedruckt in einem handlichen Bande der Oeffentlichkeit übergäbe[23]). Am leichtesten freilich würde man, falls nicht neue Handschriften eine vollständige Umgestaltung der Schrift möglich machen sollten, sich darüber trösten, dass ein kriegswissenschaftliches Bruchstück[24]), welches Heron's Namen trägt, eben so unbekannt bliebe, als es bisher war. Interessanter ist schon eine zweite Schrift ähnlichen allgemeinen Zweckes über Anfertigung von Geschützen[25]). „Ein sehr grosser" — so beginnt etwa die Abhandlung — „und vorzugsweise nothwendiger Theil der auf die Philosophie verwandten Studien bezieht sich auf die geistige Ruhe. Von ihr handelten viele Gelehrte, welche der Philosophie sich befleissigten, und diese Sorge bleibt, sie wächst mit jedem Tage, sie wird nie durch logische Untersuchungen ein Ende finden. Die Mechanik allein besiegt alle Schwierigkeiten, welche den Betrachtungen über die geistige Ruhe sich entgegenstemmen und zeigt leicht, dass alle Menschen ein ungestörtes Leben führen können mit Hülfe des kleinsten Theiles der Mechanik, welchen man die Lehre von der Anfertigung der Geschütze nennt". Nach dieser Einleitung, welche täuschend den Eindruck einer Budgetrede eines Kriegsministers macht, wiewohl Heron, soweit wir wissen, eine derartige Stellung am alexandrinischen Hofe nicht einnahm, werden die Geschütze in zwei Gattungen getheilt, deren erstere horizontal im Kernschusse zu treffen, deren zweite im Bogen zu werfen bestimmt ist. Beider Herstellung mit Angabe eines bestimmten Massverhältnisses wird gelehrt, und nun folgt zum Schlusse eine geometrische Aufgabe, deren Stellung einigermassen überraschen kann, wofern man die an sich sehr natürliche

Art der Anfügung nicht kennt. Es wird nämlich gelehrt, dass, um ein Geschütz von grösserer, etwa von 3fach stärkerer Kraft als ein gegebenes ist anzufertigen, die Sehne eine 3fach stärkere Spannung erleiden muss. Diese ihr zu verschaffen, muss ein gewisser cylindrischer Theil der Maschine sich ähnlich bleiben und dabei 3mal grösser werden. Nun verhalten sich ähnliche Cylinder wie die Cuben einer Abmessung, z. B. des Durchmessers, also muss hier sich verhalten $d_1^3 : d_2^3 = 1 : 3$ (allgemein wie $1 : n$). Das ist die delische Aufgabe von der Würfelverdoppelung nur in verallgemeinerter Form, und so löst Heron hier die Aufgabe zwischen zwei gegebenen Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen einzuschalten, eine Auflösung, welche dadurch um so gesicherteren Ursprungs ist, als sie ausdrücklich als heronisch benannt von Pappus aufbewahrt worden ist[21]).

Sollen (Figur 1.) zwischen die beiden Längen $\alpha\beta, \beta\gamma$ zwei mittlere geometrische Proportionalen eingeschaltet werden, so bildet man aus den gegebenen Längen ein Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$, dessen beide gleichen sich in ϑ gegenseitig halbirenden Diagonalen gezogen werden. Ein um die Ecke β sich drehendes Lineal wird alsdann in die Lage gebracht, dass seine Durchschnitte mit den Verlängerungen von $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$, nämlich ζ und ε gleich weit von ϑ abstehen, so ist $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$. Die Zeichnung der Hülfslinien $\vartheta\varepsilon$, $\vartheta\zeta$ und $\vartheta\eta$ (letztere senkrecht auf $\alpha\delta$) lässt erkennen

$$\vartheta\zeta^2 = \vartheta\eta^2 + (\eta\alpha + \alpha\zeta)^2 = \vartheta\eta^2 + \eta\alpha^2 + \alpha\zeta\,(\alpha\zeta + 2\,\eta\alpha) \text{ oder}$$

$$\vartheta\zeta^2 = \alpha\vartheta^2 + \alpha\zeta \times \delta\zeta.$$

Ganz ebenso muss sein

$$\vartheta\varepsilon^2 = \gamma\vartheta^2 + \gamma\varepsilon \times \delta\varepsilon.$$

Ferner ist $\vartheta\zeta = \vartheta\varepsilon$ und $\alpha\vartheta = \gamma\vartheta$, also auch $\alpha\zeta \times \delta\zeta = \gamma\varepsilon \times \delta\varepsilon$ und $\alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \delta\varepsilon : \delta\zeta$. Nun ist weiter $\alpha\beta : \alpha\zeta = \delta\varepsilon : \delta\zeta$ und $\delta\varepsilon : \delta\zeta = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$, also endlich $\alpha\beta : \alpha\zeta = \alpha\zeta : \gamma\varepsilon = \gamma\varepsilon : \beta\gamma$ wie zu beweisen war. Wir haben bei dieser Beweisführung den Gedankengang Heron's nur in modernerer Einkleidung beibehalten und zur Bezeichnung ungefähr die Buchstaben gewählt, welche bei Thevenot abgedruckt sind. Theilweise müssen nämlich Thevenots Buchstaben auf Schreibfehlern der zu Grunde liegenden Handschrift beruhen. Unser ε heisst

bei ihm bald ε bald η; unser η fehlt vollständig; unser ϑ besitzt bei ihm eine alterthümliche Form des Buchstaben *beta*, während unser β genau so heisst wie auf unserer Figur. Wenn wir auf diese Buchstaben einige Aufmerksamkeit richten, so folgen wir darin Hultsch, welchem es gelungen ist, aus den Buchstaben einer Figur wichtige Folgerungen zu ziehen[26]). Auch uns sollen dieselben Dienste leisten. Wir vergleichen sie mit den Buchstaben der Figur bei Pappus in der Uebersetzung des Commandinus. Dabei treten folgende Buchstabengleichungen hervor: $\alpha = A$, $\beta = B$, $\gamma = C$, $\delta = D$, $\varepsilon = E$, $\zeta = F$, $\vartheta = G$, $\eta = H$, wie uns scheint eine ziemlich zuverlässige Gewähr, dass die griechische Pappushandschrift des Commandinus dieselben alphabetisch einander folgenden Buchstaben an der gleichen Figur zur Bezeichnung derselben Punkte gebrauchte, wie die Handschrift, welche Thevenot abdruckte, und damit zugleich eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit, dass in Heron's Urschrift dieselben Buchstaben genau ebenso verwerthet worden waren.

Wir gehen zu einer zweiten Schrift Heron's in dem Thevenot'schen Sammelwerke über, zu der Lehre von der Anfertigung von Automaten[27]), dem Ergebnisse der Mechanik fester Körper für das Vergnügen der Menschen. Es handelt sich darin um zwei wesentlich verschiedene Gattungen von Automaten, um solche, die vom Orte sich wegbegeben, und um solche, die an dem Orte bleiben. Die ersteren, für welche Heron offenbar eine gewisse Vorliebe besitzt, erfordern zu ihrer Bewegung eine glatte Unterlage ohne Rauhheiten und Unebenheiten. Man soll sie auch nicht bergauf bewegen lassen wollen, damit sie nicht zurückrutschen. Ist eine ganz glatte Fläche nicht gegeben, so vollzieht sich die Bewegung am Besten in vorgezeichneten Bahnen, d. h. in Rinnen, um nicht gar das allzu moderne Wort Schienenweg zu gebrauchen[28]). Von sonstigen Vorschriften ist hervorzuheben, dass man die Stricke, welche benutzt werden, um die Bewegungen zu vermitteln, längere Zeit mit Gewichten beschwert aufhängen, dann mit einem Gemische von Wachs und Pech einschmieren soll, damit sie eine unveränderliche Länge behalten. Von der Anwendung von Thiersehnen soll man mit Ausnahme einer Sehne, welche

die Bewegung zu erzeugen bestimmt ist, ganz absehen, weil diese bei Witterungswechsel ihre Länge zu sehr verändern. Die einzelnen Abmessungen der Automaten soll man klein halten, damit nicht der Verdacht entstehe, es stecke irgend ein Mensch darin verborgen, welcher die Bewegung hervorbringe. Von besonderen Künsteleien dürfen wir vielleicht erwähnen, dass es oftmals darauf ankommt, einen Schieber zu einer vorbestimmten Zeit unter einer Oeffnung wegzuziehen. Dieses einfache Mittel dient dazu, Bleikörner auf ein Trommelfell auffallen zu lassen, um Donner zu erzeugen, dieselbe Methode, sagt Heron, von welcher im Theater Gebrauch gemacht wird. Auf einer freigemachten Oeffnung, unter welcher eine brennende Lampe, über welcher auf einem Metallgitter leicht entzündliche Stoffe, z. B. Holzspähne, sich befinden, beruht auch die niedliche Ueberraschung des Zuschauers durch ein auf einem Altärchen scheinbar von selbst sich entzündendes Opferfeuer.

Weit berühmter als die Anwendungen, welche Heron von der Schnellkraft thierischer Sehnen zu machen wusste, sind diejenigen von dem Drucke der Luft, oder allgemeiner gesagt, seine Benutzung gas- und dampfförmiger Stoffe zur Bewegungserzeugung[29]. Heron war keineswegs Begründer der hier massgebenden Naturanschauung; er war ebensowenig der Erfinder aller Apparate, welche hier zur Rede kommen. Philo von Byzanz[30] hat sicherlich schon etwas früher die Ansichten über leer und lufterfüllt, über zusammenhängende Leere u. s. w., von welchen wir weiter unten zu berichten haben. Er beschreibt ein siebförmig durchlöchertes Gefäss, aus welchem keine Flüssigkeit ausläuft, so lange die einzige obere Oeffnung mit dem Finger zugehalten wird. Er kennt einen Saugheber zum Probiren des Weines und dergleichen mehr. Aehnliche Anschauungen und Erfindungen werden wir auch dem Ktesibius zutrauen dürfen, dem Lehrer Heron's. Hat doch Philo von Byzanz bei Ktesibius in Alexandrien eine Wurfmaschine gesehen, welche die Geschosse mit Anwendung von zusammengepresster Luft schleuderte[31]; wird doch Ktesibius als Erfinder der Wasserorgel gerühmt[32]; sind doch dessen Wasserhebewerke hochgeschätzt[33]. Aber freilich ist ausser

solchen seltenen Erfindungszuweisungen, ausser der bis vor wenigen Jahren unbekannten Abhandlung des Philo nichts Ausführlicheres bis auf uns gekommen. Nur Heron's Schrift blieb unverloren, und wenn im Allgemeinen, Ausnahmen natürlich zulassend, behauptet werden darf, es seien die verbreitetsten, muthmasslich auch die besseren Schriftsteller des Alterthums, welche sich trotz der wiederholten Zerstörungen grosser Büchersammlungen forterhalten haben, so beweist die nähere Kenntnissnahme der Schrift Heron's, und selbst ihr Vergleich mit der philonischen Abhandlung ähnlichen Inhaltes, dass es hier sich keineswegs um eine Ausnahme von jener Regel handelt.

Das physikalische Glaubensbekenntniss des Heron weicht, wie er selbst sagt, von dem Anderer ab. Es giebt Leute, welche überhaupt an keinen leeren Raum glauben. Zu diesen gehöre er nicht. Nur eine gesammelte Leere gebe es nicht, so z. B. kein leeres Gefäss, denn was uns als solches erscheine, enthalte immer noch Luft; dagegen seien zwischen den Lufttheilchen leere Stellen vorhanden, wie Luft zwischen den Sandkörnern. Die Luft kann dem entsprechend mehr, als es in ihrer Natur liegt, zusammengepresst, sie kann auch mehr ausgedehnt werden. Im ersteren Falle sucht sie, wie etwa ein Schwamm, ihre ursprüngliche Ausdehnung wieder anzunehmen; im zweiten Falle entsteht vorübergehend eine gesammelte Leere, nach welcher andere Körper sich hinbewegen, um sie auszufüllen, z. B. die Haut der Lippe nach einem Kölbchen mit engem Halse, aus welchem man die Luft ausgesogen hat. Auf ähnlichen Grund hin steigt die Flüssigkeit in die Glaseier der Aerzte[34]); ähnlich ist die Wirkung des Schröpfkopfes, indem das hineingebrachte Feuer die Luft aufzehrt; so wird auch Wasser durch Feuer verzehrt und dabei in Luft verwandelt, der Uebergang ist der Dampf.

Wir müssen es uns versagen alle sinnreichen, nützlichen und unterhaltenden Anwendungen auseinanderzusetzen, welche Heron von diesen physikalischen Sätzen zu machen weiss. Wir nennen nur kurz in der ersten Richtung den Heber, die Druckpumpe, die Feuerspritze[35]). Zwischen dem Nützlichen und Unterhaltenden in der Mitte steht die Einrichtung einer

Lampe, welche ihr Brennen selbst regelt, wenn auch im Grunde deren Beschreibung in die Abhandlung vom Luftdrucke nicht passen will, da dieser keinerlei Anwendung dabei findet; der Docht ruht nämlich auf einem Schwimmer, und wenn das Oel verbrennt, der Schwimmer also sich senkt, dreht sich in Folge dieses Sinkens ein Zahnrad und schiebt dadurch jedesmal den Docht um ein Stückchen weiter vor. Als hübsche Spielereien erwähnen wir einen Ballon, aus welchem man unter Benutzung der Gesetze des Hebers nach Wunsch kaltes oder warmes Wasser ausströmen lassen kann; eine von den Taschenspielern unserer Zeit sogenannte Zauberflasche, aus welcher vielerlei beliebige Weinsorten ausgeschenkt werden können; ein Püppchen, welches scheinbar ohne äussere Einwirkung von Zeit zu Zeit Opferflüssigkeit in ein auf einem kleinen Altare brennendes Feuer giesst, wobei Dampfdruck wirksam ist; endlich einen Apparat, der bei Heron noch Spielerei zur bevorzugten Bewegungskraft der Neuzeit führen konnte, nämlich ein nach dem Gedanken des Segner'schen Wasserrades construirtes, durch ausströmenden Dampf in Bewegung versetztes Reaktionsrad[36]); während wir der Vollständigkeit wegen anführen, dass der sogenannte Heronsball in keiner Weise bei Heron sich findet, und dass ein bei ihm beschriebener intermittirender Brunnen Nichts weniger ist, als die gleichbenannte Vorrichtung unserer physikalischen Sammlungen.

Auch optische Dinge haben Heron beschäftigt. Wir beginnen hier mit der Besprechung derjenigen Schrift, welcher Heron den Titel der Katoptrik beigelegt hat. Im Jahre 1518 erschien dieselbe erstmalig im Drucke[37]); allerdings nicht im griechischen Originaltexte, den wir auch heute noch entbehren, sondern in einer lateinischen Uebersetzung von sehr fragwürdigem philologischen Werthe und unter der Ueberschrift: *Ptolomeus de Speculis.* Venturi hat bereits gezeigt[1]), dass dieser Name falsch sei, dass vielmehr die Katoptrik Heron's vorliege. Martin hat die Beweisführung Venturi's vervollständigt[38]) und als muthmasslichen Uebersetzer Wilhelm von Mörbeck genannt. Um einen letzten grossen Schritt hat Valent. Rose die Frage weiter gebracht[39]), indem er nahezu zur Gewissheit erhob, dass wirklich Wilhelm

von Mörbeck, und zwar im Jahre 1269 bei einem Aufenthalte in Viterbo, jene Uebersetzung verübte, und indem er ausserdem in Erfurt die einzige bis jetzt bekannte Handschrift der Abhandlung entdeckte, einen Papiercodex vom Ende des XIV. S. aus der Sammlung des alten Meister Amplonius. Nach dieser Handschrift in Verbindung mit einer Abschrift des alten Druckes in der Marcusbibliothek ist nun der neue sehr dankenswerthe Abdruck veranstaltet[40]).

Auch hier beschränken wir uns auf Erwähnung des Interessantesten. Der Lichtstrahl, so lautet etwa die optische Theorie Heron's, stammt aus dem Auge. Er ist grade, weil jeder geworfene Gegenstand geneigt ist, den kürzesten Weg einzuschlagen. Seine Geschwindigkeit ist unendlich gross. An einem dichten polirten Körper wird er gebrochen, in den durchsichtigen dringt er ein. Beim Rückprallen folgt er dem Gesetze von der Gleichheit des Einfalls- und Ausfallswinkels, weil diese Voraussetzung erfüllt werden muss, damit der Weg der möglich kürzeste sei, und dasselbe Gesetz gilt wie für den ebenen so auch für den convex sphärischen Spiegel. Unter den Anwendungen, welche sämmtlich der unterhaltenden Optik angehören, nennen wir die Herstellung eines nach einer Richtung convexen, nach der darauf senkrechten Richtung concaven Spiegels, der die Gesichtszüge auf das Sonderbarste verzerrt; die Verbindung dreier rechtwinklig dreieckiger Spiegel zu einer Ecke, welche dem Beschauer seinen Rücken und den Kopf nach unten gewendet zeigt; die Kunst, mit Hülfe eines richtig gedrehten Planspiegels das Bild eines leuchtenden Punktes an einen bestimmten Ort zu werfen; endlich einen Apparat, der nach fast 2000jähriger Vergessenheit in unseren Tagen wieder neu erfunden wurde, um die sogenannten Geistererscheinungen der Taschenspieler hervorzubringen. Der Spiegel ist nämlich so geneigt, dass in das Auge des Zuschauers das Bild eines unter dem Boden verborgenen Objectes fällt, während das Bild des Zuschauers selbst dort unten hingeworfen, von ihm nicht gesehen wird und dadurch den Gedanken nicht in ihm auftauchen lässt, dass er einen Spiegel vor sich habe.

Noch eine weitere Schrift Heron's über die Dioptra,

gemeiniglich kurzweg Dioptrik genaunt[41]), scheint dem Namen nach eine Verwandtschaft mit der zuletzt besprochenen zu besitzen. Allein es scheint nur so. Wer in Heron's Dioptrik die Lehre von der Brechung des Lichtes in durchsichtigen Mitteln sucht, wofür der Name heutigen Tages in Uebung ist, wird aufs Aeusserste überrascht statt dessen eine sogenannte praktische Geometrie, eine Anleitung zum Feldmessen finden. Dioptrik ist eben in diesem Titel nur die nicht griechische Verketzerung des eigentlichen Namens „über die Dioptra", und die Dioptra ist das hauptsächlichste Instrument des griechischen Geodäten. Ihre Beschreibung bildet den Anfang, ihre Benutzung den Körper des Werkchens, wenn man von einigen Anhängen absieht. Die Gestalt der Dioptra ist trotz der ziemlich ausführlichen Beschreibung nicht mit voller Gewissheit wieder herzustellen, das beweisen schon die von einander und von einer alten Zeichnung abweichenden Abbildungen, mit welchen Venturi und Vincent sich versucht haben[42]). Die Haupttheile sind ein Fuss mit zur Sicherung senkrechter Aufstellung dienendem Bleisenkel, eine horizontale, auf dem Fusse ruhende Scheibe und auf dieser wieder die Dioptra im engeren Sinne, d. h. ein 4 Ellen langes Lineal[43]), welches an beiden Enden Plättchen mit kreuzweisen Einschnitten zum Hindurchvisiren trägt und vermöge seiner bedeutenden Länge eine ziemlich sichere Einstellung verbürgt. Das Lineal ist auf und mit der Scheibe in vertikaler wie in horizontaler Ebene drehbar, indem ineinandergreifende Zahnräder die Bewegungen vermitteln und regeln. Besonders hervorgehoben durch zwei kleine Zäpfchen ist die zur ursprünglichen Dioptrastellung senkrechte Richtung, so dass die Einvisirung rechter Winkel auf dem Felde ohne jede Kunstfertigkeit völlig genau erfolgt. Unsere Leser erkennen aus dieser nur die Hauptbestandtheile erwähnenden nothdürftigen Beschreibung sicherlich die nahe Verwandtschaft zwischen jenem alten, vielleicht uralten Instrumente und dem Astrolabium des Ptolomäus und der mittelalterlichen Astronomen, ebenso wie die Verwandtschaft zwischen diesem und dem Theodolithen der neueren Feldmesskunst offenkundig ist, so dass dieser letztere seine, wenn auch nur mittelbare Abstammung von der Dioptra

nicht zu verleugnen vermag. Die Aehnlichkeit erstreckt sich auch auf die Hülfsvorrichtungen, welche mit der eigentlichen Dioptra in Verbindung treten. Den Bleisenkel am Fusse der Dioptra haben wir schon erwähnt, er erfüllt seine Bestimmung mit Hülfe einer auf einem Stifte am untersten Theile des Fusses eingeritzten senkrechten Geraden, längs welcher das Loth hängen muss, wenn die Aufstellung befriedigend sein soll. Andrerseits ist selbstverständlich auf die Horizontalität des, wie wir sahen, drehbaren oberen Theiles des Apparates zu achten. Zu deren Sicherung dient eine Wasserwage, bestehend aus einem Kupferröhrchen mit zwei angelötheten, etwa 12 Finger langen Glasröhrchen, in welchem das eingegossene Wasser eine übereinstimmende Höhe erreichen muss[44]). Kaum weniger modern sind die von der Dioptra losgetrennten Hülfsmittel des Feldmessers zu Heron's Zeiten. Signalstangen mit Bleisenkel versehen sind durch Maassstriche abgetheilt. An ihnen sind kreisrunde Scheiben verschiebbar, deren beide Hälften von schwarzer und weisser Farbe in einem horizontalen Durchmesser zusammentreffend die Sichtbarkeit in grösserer Entfernung und zugleich die genaue Einstellung und Ablesung ermöglichen. Höchst merkwürdig ist eine im § 21 der Dioptrik (nach der im Vincent'schen Abdrucke vorgenommenen Abtheilung des Textes) beschriebene Methode, Entfernungen mit einiger Genauigkeit abzuschätzen, welche auf eine Art von Distanzmesser herauskommt. Für die späteren Entwicklungen dieser Schrift wäre die genaue Bekanntschaft mit einem Ersatzmittel der Dioptra, dessen „Manche“ sich bedienen[45]), sehr wünschenswerth. Leider sind wir nur besser unterrichtet darüber, wer die Manche des Heron sind, von denen im folgenden Abschnitte die Rede sein wird, als dass die Beschreibung ihres Apparates, des sogenannten Sternes, ein durchaus genügendes Bild desselben in uns hervorbrächte. So viel geht indessen, wie uns scheint, aus Heron hervor, dass der Stern gleichfalls ein Analogon in einem modernen Instrumente, im Winkelkreuze, besitzt. Wie dieses muss er aus zwei in horizontaler Ebene sich rechtwinklig schneidenden Linealen bestanden haben; an den vier Enden dieser Lineale befanden sich ebensoviele Blei-

senkel, welche aber, auch wenn der Stern auf einem Stative ruht, nicht leicht in Ruhe kommen, wie unser Verfasser klagt, namentlich wenn der Wind einigermassen stark geht, und darunter leidet leicht begreiflich die Sicherheit, ob der Apparat auch wagerecht stehe. Nach diesen Bemerkungen über die Werkzeuge heronischer Feldmessung, welche in der Dioptrik theils beschrieben, theils im Vorbeigehen angedeutet werden, wenden wir uns zu den Aufgaben, welche mittelst jener Werkzeuge gelöst werden, und welche uns noch weit deutlicher die verhältnissmässige Unveränderlichkeit feldmesserischer Vorschriften seit zwei Jahrtausenden hervortreten lassen.

Das Nivelliren einer Gegend[46]) wird (§ 6) genau ebenso gelehrt, wie man heutigen Tages zu verfahren pflegt; auch ein Hauptzweck des Nivellirens: die Anlegung von Wasserleitungen tritt dabei zu Tage, indem hier die Namen von Wasserhebemaschinen vorkommen. Für das Nivelliren selbst is an einer anderen Stelle[47]) ein besonderer Kunstausdruck: „chorobatein“ in Anwendung, sei es nun dass man diesen wörtlich zu übersetzen habe „in einer Gegend fortgehen“, sei es dass die Meinung besser durch die Uebersetzung „mit dem Chorobates arbeiten“ getroffen werde, wo der Chorobates also ein bestimmtes Instrument, eine Art von Wasserwage oder dergleichen darstellte.

Nächst dem Nivelliren wird (§ 7) zwischen zwei Punkten A und B, welche von einander nicht eingesehen werden können, eine Gerade abgesteckt (Figur 2). Durch partielle Bewegungen auf den punktirt gezeichneten, stets zu einander senkrechten Linien gelangt man nämlich von dem einen Punkte endlich zu dem zweiten. Die vollzogenen Bewegungen, deren Maasse man genommen hat, werden addirt, beziehungsweise subtrahirt, und nun kennt man die gegenseitige Lage beider Punkte durch Stücke, welche modern ausgedrückt ihre rechtwinkligen Coordinaten heissen würden, während der erste Punkt der Ordinatenaxe, der zweite der Abscissenaxe angehört. Auf dem Papiere ergiebt sich hiermit das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Katheten die beiden Coordinatenaxen sind, während die Hypotenuse die gesuchte Gerade AB ist. Die eigentliche Absteckung

der Geraden, d. h. die Uebertragung derselben vom Papier auf das Feld, erfolgt durch Absteckung kleinerer Dreiecke, welche sämmtlich unter sich und jenem Dreiecke auf dem Papiere ähnlich sind.

Die Entfernung des Standortes A von einem sichtbaren, aber unzugänglichen Punkte P lehrt § 8 kennen (Figur 3). Die Richtung der AP wird abgesteckt und rückwärts nach einem nahe bei A gelegenen Punkte B verlängert. Werden nun in A und B Signalstangen AC, BD aufgestellt, und wird von D aus der Fusspunkt des Thurmes, Baumes oder sonstigen in P befindlichen Objectes einvisirt, so kann an der Stange AC, etwa mit Hülfe der oben beschriebenen Signalscheibe, der Punkt C bestimmt werden, durch welchen jene optische Linie DCP hindurchgeht. Nun folgt sofort aus der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, dass

$$AP = \frac{AB \times AC}{BD - AC}.$$

Diese Aufgabe dient im folgenden § 9 zur Auffindung der Breite eines Flusses[48]), ohne ihn zu überschreiten (Figur 4). In A wird die Dioptra auf irgend ein auf derselben Flussseite mit A dicht am Ufer befindliches sichtbares Object C eingestellt. Dadurch ergiebt sich unmittelbar die zu AC senkrechte Richtung AB, welche die Breite des Flusses unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung des Parallelismusses beider Ufer darstellt. Es bleibt also nur die leicht zu erfüllende Bedingung übrig, dass in B ein einvisirbares Object sich befinde, um die Auffindung der Flussbreite auf die Aufgabe des vorigen Paragraphen, die Bestimmung der unzugänglichen AB, zurückgeführt zu haben.

Wieder einen Schritt weiter geht § 10, wo die gegenseitige Lage und Entfernung zweier von Weitem sichtbarer Orte in Frage kommt[49]), und zwar die Entfernung ihrer auf derselben Horizontalebene befindlichen Fusspunkte, eine ähnliche Bestimmung, wie sie auch schon § 8 stillschweigend hinzutrat, hier aber ausdrücklich ausgesprochen ist. Heron giebt nicht weniger als drei Methoden zur Lösung dieser Aufgabe, deren erste uns hier genügen soll (Figur 5). Um AB zu messen, stecke man von einem beliebigen Punkte C des Feldes aus die Richtung CA und eine zu derselben

in C senkrechte Richtung ab. Auf letzterer geht man bis zu dem Punkte D fort, von welchem aus B in der Vertikalen zu CD gesehen wird. Nun kann nach § 8 die CA von C aus, die DB von D aus gemessen werden, wodurch der Unterschied beider Längen $DB - CA = DE$ gegeben ist. Wurde ausserdem CD beim Abschreiten gemessen, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke CDE, dessen beide Katheten nunmehr bekannt sind, die Hypotenuse CE leicht zu berechnen, und dieser parallel und gleich ist die verlangte Gerade AB.

Davon nun wieder macht § 11 Gebrauch, um eine Senkrechte zu einer unzugänglichen Geraden in einem unzugänglichen Punkte derselben zu gewinnen. Mit Hülfe des in § 10 gelehrten Verfahrens verschafft man sich die Parallellinie CE zu der Unzugänglichen AB und geht auf derselben bis zu einem Punkte F, wo AF senkrecht in die soeben abgesteckte CE einschneidet; alsdann muss AF auch senkrecht zu AB in A sein.

Der folgende § 12 beschäftigt sich damit, die Höhe eines entfernten Punktes A über dem Standorte C des Beobachters zu bestimmen (Figur 6). Durch die in C aufgestellte Dioptra wird die optische Linie $DEFA$ einvisirt, beziehungsweise werden die Höhen E und F auf zwei in der Nähe von C eingesteckten Signalstangen bestimmt. Nivellirung des Bodenstückes von C über C' nach C'' giebt nun die wirklichen Höhen EG und FH statt der gemessenen Höhen EC' und FC''. Nach § 8 ist aber CG, CH, CB und damit auch GH und GB bekannt, folglich auch AB durch Aehnlichkeit von Dreiecken erhältlich.

Es ist nicht unsere Absicht, über sämmtliche 37 §§ der Dioptrik in dieser Weise fortzuberichten. Die Ausführlichkeit, mit welcher wir uns bei § 6 bis § 12 verweilt haben, nur darin Abkürzungen uns gestattend, das wir den Gedankengang in möglichst knappster Form wiedergaben, sollte nur zeigen, wie systematisch Heron vorgeht, wie er eine Aufgabe auf die andere stützt, wie er ganz abweichend von dem Charakter der bisher besprochenen Werke nicht eine Sammlung kunterbunt gemischter Probleme liefert, die, wenn man einmal zweifelsüchtig sein will, eben so gut sechs ver-

schiedenen Schriftstellern als einem einzigen angehören können, sondern wie hier offenkundig ein Buch vorliegt von einem Verfasser, ein Lehrbuch der praktischen Geometrie, oder wenigstens eine bedeutsame Abtheilung eines solchen Lehrbuches. Dieses Ergebniss wollen wir uns fürs Erste wohl merken und nun aus den Folgetheilen der Dioptrik nur einzelne Paragraphe noch herausgreifen, welche durch den Inhalt und durch ihre in unseren späteren Abschnitten nachzuweisende Geschichte ein doppeltes Anrecht auf unsere Aufmerksamkeit besitzen.

Aufnahme eines Feldes, § 23. Von irgend einem Punkte *A* des Umfanges aus wird mit Hülfe der Dioptra eine an sich willkürliche Gerade *AE* abgesteckt, welche bis zur gegenüberliegenden Begrenzung des Feldes sich erstreckt (Figur 7). Senkrecht zu ihr steckt man die *AB* ab, zu dieser wieder *BC* und zu dieser *CD*, welche die Anfangsgerade *AE* in *D* schneidet. So ist in das Feld ein Rechteck *ABCD* eingezeichnet, welches drei seiner Eckpunkte auf der Umgränzung selbst besitzt. Die zwischenliegenden Grenzstrecken werden durch rechtwinklige Coordinaten bestimmt, welche der geschickte Feldmesser so wählen wird, dass die Grenze zwischen zwei eintreffenden Senkrechten leidlich gradlinig aussieht[50]).

Ungefähr den Gegensatz zu dieser Aufgabe bietet § 25, in welchem verlangt wird die auf dem Felde mit Ausnahme von zwei oder drei durch Grenzsteine gesicherten Punkten verloren gegangene Umfriedigung eines Grundstückes mit Hülfe des vorhandenen Planes wieder herzustellen (Figur 8). Erhalten seien also die Steine *B*, *C*, deren Inschriften gestatten, sie auf dem Plane zu identificiren; gesucht werden demnach die beiden Hauptrichtungen auf dem Felde, welche zu einander senkrecht dem ganzen Plane als Grundlage dienen, so dass, wenn z. B. *BG* einer dieser Hauptrichtungen gleichlaufend und *CS* zu ihr senkrecht wäre, die Längen *BS*, *SC* mit der Inschrift der beiden Grenzsteine *B*, *C* im Einklang stehn. Jedenfalls kann man *BC* abstecken und auf ihr einen Punkt *T* ziemlich nahe bei *B* sich genau bemerken. Nun ist auf dem Plane das Dreieck *BCS* bekannt und vermöge der erfolgten Abmessung von *BC* auch das Verhältniss der

Längen auf dem Plane zu denen auf dem Felde. Das Dreieckchen BTU muss dem BCS ähnlich sein, aus der gemessenen Länge BT folgt daher durch Rechnung die Länge von BU und UT, welche auf einem Stricke FQV durch Strichelchen angemerkt werden. Nun befestigt man diesen Strick mit F in B, mit V in T und spannt ihn in Q an, so dass bei Q ein rechter Winkel entsteht; damit ist U gefunden, also auch die Richtung $BUSG$.

Am Bekanntesten, aber auch am Merkwürdigsten dürfte der Inhalt des § 30 sein, welchen die sogenannte heronische Formel für die Dreiecksfläche berechnet aus den drei Seiten des Dreiecks bildet. Wir würden unserem Vorhaben, dem Leser dieses Werkchens, sofern er nicht selbst weitere Forschungen anstellen will, die Benutzung sonstiger Quellen entbehrlich zu machen, untreu werden, wenn wir der ebenso geistvollen, als eleganten Beweisführung Heron's für seine Formel nicht hier einen kleinen Platz einräumten, wenn auch nach Hultsch's Aufsatz in der Zeitschrift für Mathematik und Physik[5]) Neues über diesen Gegenstand kaum zu sagen sein dürfte. Das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ erweist sich (Figur 9) bei Einbeschreibung des Kreises mit dem Halbmesser $\eta\varepsilon$ als gleich dem doppelten eines Dreiecks mit diesem Halbmesser als Höhe und dem halben Umfang von $\alpha\beta\gamma$ oder mit $\gamma\vartheta$ als Grundlinie (sofern $\beta\vartheta = \alpha\delta$ genommen ist). Nun wird die Hülfsconstruktion $\eta\lambda$ senkrecht zu $\eta\gamma$, $\beta\lambda$ senkrecht zu $\beta\gamma$ und $\gamma\lambda$ vollzogen nebst den Halbmessern $\eta\delta$, $\eta\varepsilon$, $\eta\zeta$ des eingeschriebenen Kreises und den Verbindungsgeraden $\eta\alpha, \eta\beta, \eta\gamma$ seines Mittelpunktes mit den Endpunkten des Dreiecks. Weil $\sphericalangle \gamma\eta\lambda = \gamma\beta\lambda = 90^0$, muss $\gamma\lambda$ der Durchmesser des umschriebenen Kreises sowohl für $\Delta\gamma\eta\lambda$ als für $\Delta\gamma\beta\lambda$ sein, d. h. $\gamma\eta\beta\lambda$ ist ein Sehnenviereck und

$$\sphericalangle \gamma\eta\beta + \gamma\lambda\beta = 180^0.$$

Aber $\sphericalangle \gamma\eta\beta = \gamma\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\beta = \frac{\zeta\eta\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\eta\delta}{2}$ und addirt man dazu noch $\alpha\eta\delta = \frac{\delta\eta\zeta}{2}$ und berücksichtigt $\zeta\eta\varepsilon + \varepsilon\eta\delta + \delta\eta\zeta = 360^0$, so zeigt sich auch

$$\sphericalangle \gamma\eta\beta + \alpha\eta\delta = 180^0$$

folglich: $\sphericalangle \gamma\lambda\beta = \alpha\eta\delta;$

ferner $\sphericalangle \gamma\beta\lambda = 90^0 = \alpha\eta\delta$, folglich $\Delta\,\beta\gamma\lambda \sim \delta\alpha\eta$ und $\beta\gamma : \beta\lambda = \delta\alpha : \delta\eta$ oder, was dasselbe ist, $= \beta\vartheta : \eta\varepsilon$, somit $\frac{\gamma\beta}{\beta\vartheta} = \frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon}$, aber aus der leicht ersichtlichen Aehnlichkeit der Dreiecke $\beta\lambda\varkappa$, $\varepsilon\eta\varkappa$ folgt auch $\frac{\beta\lambda}{\eta\varepsilon} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}$, mithin $\frac{\gamma\beta}{\beta\vartheta} = \frac{\varkappa\beta}{\varepsilon\varkappa}$. Durch Addition der Einheit auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens folgt

$$\frac{\gamma\vartheta}{\beta\vartheta} = \frac{\varepsilon\beta}{\varepsilon\varkappa} \text{ oder } \frac{\gamma\vartheta^2}{\gamma\vartheta.\beta\vartheta} = \frac{\gamma\varepsilon.\varepsilon\beta}{\gamma\varepsilon.\varepsilon\varkappa} \text{ oder } \frac{\gamma\vartheta^2}{\gamma\vartheta.\beta\vartheta} = \frac{\gamma\varepsilon.\varepsilon\beta}{\eta\varepsilon^2}$$

und daraus $(\gamma\vartheta \,.\, \eta\varepsilon)^2 = \gamma\varepsilon \,.\, \varepsilon\beta \,.\, \beta\vartheta \,.\, \gamma\vartheta$. Nun war der Flächeninhalt des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ als des Doppelten des Dreiecks $\alpha\eta\vartheta = 2 \cdot \frac{\gamma\vartheta.\eta\varepsilon}{2} = \gamma\vartheta.\eta\varepsilon$ und somit ist

$$\Delta = \sqrt{\gamma\varepsilon.\varepsilon\beta.\beta\vartheta.\gamma\vartheta}$$

erhalten, wo die vier Factoren unter dem Wurzelzeichen sich unter der Voraussetzung $\alpha\beta = c$, $\alpha\gamma = b$, $\beta\gamma = a$ leicht anders ordnen und schreiben lassen, so dass

$$\Delta = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}}$$

entsteht, eben die Formel, die Heron's Namen führt.

Endlich fordern § 34 und 35 wenigstens eine kurze Erwähnung, in deren ersterem Heron einen ziemlich genauen Wegmesser beschreibt, welchen er als seine eigene Erfindung rühmt gegenüber von minder gelungenen Versuchen seiner Vorgänger[51]), in deren letzterem er eine ähnliche bei Schiffsreisen anwendbare Vorrichtung erläutert. Allerdings leidet grade dieser Paragraph an besonderer Mangelhaftigkeit des Textes, und so müssen wir es dahin gestellt sein lassen, ob die Zahlen, welche Vincent darin lesen will[52]), auf Glaubwürdigkeit Anspruch machen können.

So viel über die heronische Dioptrik, an deren Echtheit zu zweifeln wir nicht den geringsten Grund haben. Die innere Uebereinstimmung, die Folgerichtigkeit des Ganges haben wir bereits hervorgehoben. Eine weitere Stütze bietet uns die grosse Aehnlichkeit der eigentlich nur verwässerten Bearbeitung jenes Anonymus von Byzanz aus dem X. S., der gemeiniglich Heron genannt wird[8]) und sich ausdrücklich an verschiedenen Stellen auf Heron von Alexandrien als

Quelle für seine „Geodäsie“ beruft. Freilich passen die Schlussparagraphe der Dioptrik weniger in den gerühmten logischen Zusammenhang. Die Dreiecksformel des § 30 z. B. wird von Hultsch mit aller Bestimmtheit für eine Interpolation aus einem anderen Werke Heron's erklärt[53]). Wir werden gleich nachher auf diese Frage zurückkommen, nur soviel für jetzt, dass Formel und Beweis uns mit Hultsch jedenfalls als heronisch erscheinen. Es giebt ja in der Mathematik Formeln, die empyrisch gefunden wurden, die auf einer nicht stets zutreffenden Induction beruhend, für Beweis oder Widerlegung auf eine vielleicht erst späte Zukunft warteten. Aber das waren einfache, nahe liegende Formeln, für welche ähnlich klingende Ausdrücke als Muster vorlagen. Ganz anders ist die Formel für die Dreiecksfläche. Wer in aller Welt konnte tastend zu ihr gelangen? Nein, sie ist von ihrem Beweis nicht zu trennen; wer sie der Oeffentlichkeit übergab, der wusste was er damit leistete, der muss eine Begründung besessen haben. Dass diese Formel ferner und, wie wir behaupten dürfen, mit einem Beweise mindestens etwa zu Heron's Zeit bekannt war, dafür spricht ihre Benutzung in den Heron zugeschriebenen Werken, wie ihr Erscheinen in Rom, von welchen der folgende Abschnitt handelt. Sollte nun der, welcher den zu Heron's Zeit mit einem Beweise bekannten Satz der heronischen Dioptrik ein und den ältesten uns heute bekannten in seinen Grundzügen von da an unverändert gebliebenen Beweis hinzufügte, ein Unrecht an dem wirklichen Erfinder begangen haben, so müsste dieser Erfinder noch vor Heron zu setzen sein. Dem stünde freilich nicht im Wege, dass kein anderer Erfinder angegeben ist. Heron liebte nun einmal das Citiren nicht, und man kann fast behaupten: alle Stellen, die ein bestimmtes Citat enthalten, sind nicht echt heronisch. Wir forschen darum keinem anderen Erfinder nach, weil die Eleganz der Formel und ihres Beweises uns keinem griechischen Schriftsteller zwischen Apollonius und Heron zu entsprechen scheint, und wir denn doch auch einer mangelhaften Beglaubigung mehr vertrauen als gar keiner. Man ist freilich so weit gegangen, sogar darin Zweifel zu setzen[54]), ob Heron überhaupt jemals Beweise mathemathischer Sätze veröffent-

licht habe. Allein grade dass Heron dieses gethan, ist eine verbürgte Thatsache, verbürgt durch die früher besprochene Auflösung der Aufgabe von der Würfelverdoppelung, verbürgt durch zwei Beweise, welche Proklus uns erhalten hat.

In einem Commentare zu den euklidischen Elementen, und zwar nur zu dem ersten Buche dieses Werkes, da ja die auf uns gekommene Schrift des Proklus, geringe Spuren ausgenommen, nicht weiter reicht, hat man sich nur ganz leichte Sätze, einfache Beweise zu erwarten. Solcher Art ist auch was von Proklus dem Heron zugewiesen worden[55]. Zuerst ein direkter Beweis des XX. Satzes des Euklid, wornach die Summe zweier Dreiecksseiten grösser ist als die dritte (Figur 10). Der Winkel bei α werde durch die $\alpha\varepsilon$ halbirt. Nun ist $\sphericalangle\, \alpha\varepsilon\gamma > \varepsilon\alpha\beta$ als Aussenwinkel des Dreiecks $\varepsilon\alpha\beta$, und wegen $\sphericalangle\, \varepsilon\alpha\beta = \varepsilon\alpha\gamma$ auch $\sphericalangle\, \alpha\varepsilon\gamma > \varepsilon\alpha\gamma$. Daraus folgt $\alpha\gamma > \varepsilon\gamma$. Genau so lässt sich auch beweisen $\alpha\beta > \beta\varepsilon$ und durch Addition der beiden Ungleichheiten $\alpha\gamma + \alpha\beta > \beta\gamma$. Der zweite nach Heron berichtete Beweis dient zu dem XXV. Satze, dass in zwei Dreiecken, welche zwei Paare gleicher, ein Paar ungleicher Seiten haben, der grösseren Seite auch ein grösserer Winkel gegenüberliegt (Figur 11). Die ziemlich wörtliche Uebersetzung der Proklus'schen Mittheilung lautet folgendermassen: „Es seien die beiden Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon\zeta$ gegeben und $\alpha\beta = \delta\varepsilon$, $\alpha\gamma = \delta\zeta$, $\beta\gamma > \varepsilon\zeta$. Weil die letztere Ungleichung stattfindet, werde $\varepsilon\zeta$ verlängert zu $\varepsilon\eta = \beta\gamma$. Ebenso werden $\varepsilon\delta$ verlängert um $\delta\vartheta = \delta\zeta$. Der um δ als Mittelpunkt mit $\delta\zeta$ als Halbmesser beschriebene Kreis geht nunmehr auch durch ϑ. Da nun $\alpha\gamma + \alpha\beta > \beta\gamma$, jene Summe aber $= \varepsilon\vartheta$ und $\beta\gamma = \varepsilon\eta$, so wird der um ε als Mittelpunkt mit $\varepsilon\eta$ als Halbmesser beschriebene Kreis die $\varepsilon\vartheta$ schneiden. Durch den vorhergenannten Kreis wird von ihm der Bogen $\eta\varkappa$ abgeschnitten, und nun ziehe man von diesem Durchschnittspunkte $\varkappa$ nach beiden Mittelpunkten die $\varkappa\delta$ und $\varkappa\varepsilon$. Nun sind als Halbmesser desselben Kreises $\delta\varkappa = \delta\vartheta = \delta\zeta = \alpha\gamma$, ferner wieder als Halbmesser eines Kreises $\varepsilon\varkappa = \varepsilon\eta = \beta\gamma$. Die Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\delta\varepsilon\varkappa$ stimmen folglich in allen drei Seiten überein, und somit ist auch $\sphericalangle\, \beta\alpha\gamma = \varepsilon\delta\varkappa$, d. h. $\sphericalangle\, \beta\alpha\gamma$ ist grösser als $\varepsilon\delta\zeta$.“ Diesen beiden Beweisen, deren

zweiter vielleicht noch etwas schärfer gefasst sein könnte, vielleicht auch bei Proklus nicht wortgetreu berichtet ist, lässt geometrische Eleganz sich sicherlich nicht absprechen, so weit so höchst einfache Dinge der Eleganz fähig sind.

Wo Heron sie ursprünglich niedergelegt hat, ist unbekannt. In den vorhandenen Schriften finden sie sich eben so wenig, wie man dort die Quelle zweier anderer Berichte des Proklus entdeckt: „Man soll auch nicht die Zahl der Grundsätze auf die kleinstmögliche zurückführen, wie es Heron thut, der nur drei voranstellt“ und „der Einwurf, nicht jedes Dreieck habe einen Aussenwinkel, nämlich bevor man eine Seite verlängert, wurde von verschiedenen, auch von Philippos gemacht, wie der Mechaniker Heron erzählt.“ Martin vermuthet[56]), Heron habe einen Commentar zu den Elementen des Euklid geschrieben und beruft sich für diese Vermuthung auf eine arabische Handschrift der Leidner Bibliothek, welche dem Kataloge nach eine Uebersetzung solcher heronischer Scholien enthalte. Ist diese Angabe des Leidner Kataloges richtig, so wird allerdings Martin beizupflichten und der Einwurf durch die Thatsache entkräftet sein, ob man schon so relativ frühzeitig Commentare zu Euklid erwarten dürfe und ob bei Heron's früher erwähnter Eigenthümlichkeit, Vorgänger in den allerseltensten Fällen zu nennen, grade ihm eine commentirende schriftstellerische Thätigkeit zuzutrauen sei? Andernfalls verbleiben wir mit Hultsch[57]) der Meinung, Heron habe solche Beweise in dem Urtexte seines grossen geometrischen Werkes oder in kleineren Monographien an den verschiedensten Stellen liefern können, und fügen wir hinzu auch geometrische Grundsätze und Notizen, es sei daher unnöthig, einen äusserlich ganz unverbürgten Commentar als von ihm ausgehend anzunehmen.

Wir haben von dem grossen geometrischen Werke Heron's gesprochen. Wir folgen darin der Ansicht, die Hultsch der Hauptsache nach dahin geäussert hat[57]), Heron habe im amtlichen Auftrage ein officielles Lehrbuch der Messkunst verfasst, welches zwar aus verschiedenen Abtheilungen bestand, deren jede ihren eigenen Namen führte, welches aber doch zugleich als ein grosses Ganzes angesehen

werden müsse, und als solches muthmasslich eine gemeinsame Gesammtüberschrift besass. Der Zweck dieses Lehrbuches war, die hergebrachten altegyptischen Regeln der Feldmesser, welche nur sehr näherungsweise richtig, aber dafür sehr leicht anzuwenden, durch diese letztere Eigenschaft zur Gewohnheit der Praktiker geworden waren, durch andere bessere Regeln zu verdrängen, welche selbst mehr an Beispielen gelehrt als erwiesen wurden. Die Wissenschaft sollte popularisirt, der handwerksmässige Geometer gezwungen werden, Richtiges auswendig zu lernen und darnach zu verfahren. In Alexandrien war ein solcher Bruch mit dem Alten nothwendiger als sonst wo.

Nicht als ob wir von der früher schon oft von uns vertretenen Ansicht zurückgekommen wären, dass die Anfänge der Geometrie in Egypten ihre Heimath hatten, dass die Priesterwissenschaft jenes Landes die ersten theoretischen Sätze elementarer Mathematik enthielt in einer Form, welche wir der euklidischen uns verwandt denken, aber neben diesen Lehrsätzen und Aufgaben vorwiegend theoretischen Interesses war auch die praktische Vermessung der Felder in Egypten zu Hause, aus der Theorie und mit derselben entstanden, aber bald sich abzweigend, um in Laienhänden sich zu verknöchern, fast anderthalb Jahrtausende hindurch derselben Formeln sich bedienend, deren Gedanke mehr und mehr abhanden kommt, deren Wortlaut sich unverändert erhält. Eine Nothwendigkeit des Zusammenhanges zwischen Feldmessung und theoretischer Geometrie scheint uns nicht immer vorhanden. Genügt es doch, um dem praktischen Bedürfnisse abzuhelfen, um der Gleichwerthigkeit von Feldern sich zu versichern, eine nicht geometrische Messung derselben vorzunehmen. Man kann die Zeit messen, welche auf die Bebauung des Feldes verwandt wird, die Getreidemenge, welche auf ihr geerndtet wird, und wir erinnern zur Verdeutlichung des hier Gesagten an die deutschen Benennungen von Feldmaassen: Morgen und Scheffel. Aber der Wunsch, eine irgendwie gestaltete Bodenfläche als Raumgebilde zu betrachten, sie unmittelbar aus ihren Grenzlinien messen zu wollen, dieser Wunsch entsprang zuerst gewiss nicht in einem von mathematischen Gedanken leeren Kopfe,

er bildet selbst schon eine mathematische That, andere voraussetzend und begründend.

Dieser geometrischen Feldmessung, wenn die Häufung schliesslich gleichbedeutender Wörter gestattet ist, um die angedeutete Beschränkung des Sinnes zu bezeichnen, begegnen wir schon um das Jahr 1700 vorchristlicher Zeitrechnung in dem berühmten, durch unseren bewährten Freund Prof. Dr. August Eisenlohr übersetzten und erläuterten mathematischen Papyrus Rhind. Wiewohl wir den Inhalt dieses Papyrus durch die zuvorkommenden Mittheilungen des Herausgebers schon mehrere Jahre genau kennen und mit dessen Genehmigung in unseren Vorlesungen über Geschichte der Mathematik uns darüber verbreiten durften, sind wir doch in dieser einem grösseren Kreise gewidmeten Veröffentlichung, durch das unbezweifelte Recht des genannten Epyptologen an der Uebersetzung, verhindert in die Einzelheiten des Papyrus weiter einzugehen, als die beiden Aufsätze es gestatten, welche Eisenlohr seit Januar 1875 zum Abdruck brachte[59]). Darnach ist jener Papyrus etwa um das Jahr 1700 v. Chr. durch einen Schreiber Aahmesu angefertigt, als Copie einer älteren Schrift von unbekanntem Datum. Es war ein Lehr- und Uebungsbuch zum Rechnen mit unbenannten und benannten Zahlen. Die Beispiele mit benannten Zahlen weisen aber überall auf die Bedürfnisse des Landmannes hin. So wird ein Vorkommen auch von Flächenausmessungen leicht begreiflich, ebenso begreiflich aber auch, dass Geometrie im wissenschaftlichen Sinne des Wortes nicht vorkommen kann, und dass aus den angewandten Formeln für Inhaltsberechnungen nur der Rückschluss gezogen werden darf, dass Theoretiker in noch weiter zurückliegender Zeit sich solcher Fragen bemächtigt hatten, nicht aber dass sie zu Aahmesu's Leben nicht über die alten Nährungsformeln hinausgekommen sein können. Dreierlei ebene Figuren sind es nun, deren Fläche gemessen wird, gleichschenklige Dreiecke, gleichschenklige Trapeze und Kreise. Fast jedes Beispiel ist eingeleitet durch die Worte „wenn Dir gesagt ist", fast bei jedem folgen alsdann die andern Worte „mache bei Dir" entsprechend etwa unseren schulgerechten Ausdrücken: Aufgabe und Auflösung.

Die Fläche des gleichschenkligen Dreiecks von den Seiten a, a, b wird gemessen durch das halbe Product der einen ungleichen in eine der gleichen Seiten, also durch $\frac{b.a}{2}$. Wir wagen es nicht Vermuthungen auszusprechen, wie man zu dieser Formel gekommen war, da es sich ganz bestimmt um gleichschenklige Dreiecke handelt, die Seiten a, b also keinen rechten Winkel mit einander bilden, und die Formel mithin nie genau richtig ist. Eine Annäherung gegenüber der richtigen Formel $\frac{b.\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$ ist allerdings vorhanden, so oft b gegen a einigermassen klein ist, und dazu tritt der practisch bedeutende Vortheil, dass die Ausziehung einer Quadratwurzel vermieden ist, an welcher der mathematische Laie zu allen Zeiten scheu vorüberzugehen pflegte. Ist einmal das gleichschenklige Dreieck $= \frac{b.a}{2}$, so folgt die Fläche des gleichschenkligen Trapezes, dessen Seiten a, a, b_1, b_2 heissen, von selbst als $\frac{a(b_1 + b_2)}{2}$, und diese Formel wird in der That benutzt, wenn auch, wie wir wohl überflüssiger Weise beifügen, nicht abgeleitet. Die Figuren sind anders gezeichnet, als wir es gewohnt sind. Die ungleiche Seite des Dreiecks befindet sich nämlich seitlich, nicht unten, und die ähnliche Lage besitzt das Trapez. Heissen also die gleichen Seiten beider Figuren, unser a, *Merit*, ein Wort von ungewissem Sinne, welches oben beigeschrieben zu sein pflegt, so kann für's Erste zweifelhaft erscheinen, ob dessen Bedeutung Etwas mit der Gleichheit der Schenkel oder mit der Lage als Scheitellinie der Figur zu thun hat. Bei einem Dreiecke findet auch, wie Herr Birch in seiner ersten Veröffentlichung über diesen Papyrus schon bekannt gemacht hat[60]), eine Zerlegung durch Hülfslinien statt, wenn gleich der Berechnung dieses Beispieles eigenthümliche Schwierigkeiten entgegenzustehen scheinen. Die Fläche des Kreises wird durch Quadrirung von $\frac{8}{9}$ des Durchmessers erhalten, somit $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3{,}1604\ldots$ eine keineswegs schlechte Annährung, jedenfalls besser als der indische Nährungswerth $\pi = \sqrt{10}$

$= 3{,}1622\ldots$, der in dem eigenthümlichen Gegensatze zu ihm steht, die Verhältnisszahl π als Quadratwurzel darzustellen, während die alten Egypter dieselbe als Quadratzahl dachten, wodurch eine förmliche Umwandlung des Kreises in ein Quadrat leichter möglich war, als unter jeder anderen Voraussetzung. Aus Eisenlohr's Veröffentlichungen führen wir ferner an, dass auch die Pyramide in dem Papyrus Rhind vorkommt, deren Name strenggenommen auf die Schreibweise mit y verzichten sollte, da er nicht griechisch mit πῦρ, Feuer, sondern egyptisch mit *piremus*, dem Namen der seitlichen Kante zusammenhängt[61]). Auf den Quotienten *sekot*, welcher bei der Pyramide auftritt und uns von hoher theoretischer Bedeutung zu sein scheint, dürfen wir nicht näher eingehen, wohl aber sei uns die Bemerkung gestattet, welche von Eisenlohr herrührend durch ihn noch nicht veröffentlicht ist, dass ein Beispiel unmögliche Zahlen zu Grunde legt. Bei jeder Pyramide mit quadratischer Grundfläche muss offenbar zwischen der Seite a dieser Grundfläche und der Kante $\varkappa$ die Ungleichung $\frac{a^2}{\varkappa^2} < 2$ erfüllt werden, und in einem Beispiele ist dieser Forderung widersprechend $a = 360$, $\varkappa = 250$, $\frac{a^2}{\varkappa^2} = \frac{129600}{62500} > 2$ angenommen.

So viel wissen wir also jetzt von der Berechnung von Flächen und verwandten Gegenständen um das Jahr 1700 aus gleichzeitiger Quelle. Das nächste egyptische uns zu Gebot stehende Material findet sich in den Inschriften des Tempels des Horus zu Edfu in Oberegypten, in welchen der Grundbesitz der Priesterschaft dieses Tempels genau vermessen und angegeben ist[62]). Die Inschriften beziehen sich mit aller Bestimmtheit auf die Regierung des Königs Ptolemäus XI., Alexander I. Dieser Fürst wurde 107 v. Chr. von seiner Mutter Kleopatra III. zum Mitregenten angenommen, nachdem der ältere Sohn und bisherige Mitregent, Ptolemäus X., vertrieben worden war. Im Jahre 90 ermordete Ptolemäus Alexander die Mutter und herrschte allein bis 88, wo Ptolemäus X., Soter II. genannt, mit Waffengewalt zurückkehrend den Thronräuber zur Flucht nöthigte. Die Edfuinschriften fallen also sicherlich zwischen 107 und 88

v. Chr., mithin in die Lebenszeit Heron's von Alexandrien. Damals waren die alten Formeln noch im Gebrauche. Zwei gleichschenklige Dreiecke mit der Fläche $\frac{b \cdot a}{2}$, gleichschenklige Trapeze in grosser Häufigkeit mit der Fläche $\frac{a(b_1 + b_2)}{2}$ kommen vor. Indessen will es uns beinahe scheinen, als sei mit der Beibehaltung der Formeln doch eine gewisse Gedankenverschiebung Hand in Hand gegangen. In alter Zeit war nach unserer oben angedeuteten Auffassung das Dreieck die primitive Flächengestalt, aus welchem das Trapez durch Abstumpfung gewonnen wurde. Jetzt sieht es aus, als ob die Sache sich umgekehrt habe. Aus dem Trapeze folgt ganz gewiss jetzt das Dreieck, der besondere Fall des Trapezes, der durch das Verschwinden einer Seite erzeugt wird. Nicht von einem Dreiecke mit den Seiten 5, 17, 17 oder 2, 3, 3 ist jetzt die Rede, sondern von Figuren, deren Seiten 0 zu 5 und 17 zu 17, beziehungsweise 0 zu 2 und 3 zu 3 sind, und deren Flächen $42\frac{1}{2}$ und 3 genannt werden, in Uebereinstimmung mit $\frac{b \cdot a}{2}$. Bei dem Trapeze aber ist die Bedingung der Gleichschenkligkeit abhanden gekommen; neben der freilich überwiegenden Zahl sogestalteter Vierecke mit dem Flächenmasse $\frac{a(b_1 + b_2)}{2}$ kommen ganz willkürliche Vierecke vor, deren Seiten a_1, a_2, b_1, b_2 zu dem Flächenmaasse $\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2}$ missbraucht werden. So z. B. 16 zu 15 und 4 zu $3\frac{1}{2}$ macht $58\frac{1}{8}$; $45\frac{1}{2}$ zu $33\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ und 17 zu 15 macht 632; $9\frac{1}{2}$ zu $10\frac{1}{2}$ und $24\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ zu $22\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ macht $236\frac{1}{4}$ u. s. w. Gewiss scheint darin, immer unter der Voraussetzung, unsere Auffassung habe das Richtige getroffen, ein Rückschritt zu liegen. Sollte aber unsere Auffassung irrig sein, und wir selbst legen auf sie kein grosses Gewicht, so ist mindestens ein Stillstand von anderthalb Jahrtausenden nachgewiesen, wenn jetzt solche Rechnungen in officiellen Schriftstücken vorkamen, als welche Tempelinschriften doch jedenfalls zu betrachten sind. Das war zu viel der Anhänglichkeit an Hergebrachtes in einem Lande, welches 200 Jahre früher einen Euklid, 100 Jahre früher einen Eratosthenes

zum Bürger hatte, in welchem gegenwärtig ein Heron von Alexandrien in voller Manneskraft stand, und wir erwarten nunmehr keinen Widerspruch, wenn wir unsere früheren Worte wiederholen: in Alexandrien war ein Bruch mit dem Alten nothwendiger als sonst wo.

Aber auch nur in Alexandrien, das hat Hultsch mit feiner Kenntniss allgemeiner Kulturverhältnisse hervorgehoben[57]), nur unter den Ptolemäern, deren Reich das einzige Beispiel einer modernem Centralisationsabsolutismusse sich nähernden Verwaltungsform bei griechischen Staaten bietet, war ein officielles Lehrbuch möglich. Jene Verwaltungsform war nun einmal am Sitze der ptolemäischen Dynastie, in Egypten, von Alters Sitte und ist es geblieben. Es war und ist theilweise noch die Nothwendigkeit gegeben für jeden Herrscher, welcher dort Festigkeit erlangen wollte, von den Pharaonen bis zum Khediven unserer Tage, jenem eingerosteten Bedürfnisse der Bevölkerung Rechnung zu tragen, welche in Betreff öffentlicher Einrichtungen nicht befragt sein wollte, welche gewohnt war, der Regierungsallgewalt in jeglichem Dinge Folge zu leisten, und eine Verbesserung der Zustände nur dann als solche anerkannte, wenn sie mit dem Rohre oder mit der Flusspferdpeitsche ihr eingebläut wurde. In der Art der Prügel bestand die einzige Veränderung. Wenn solchen Verhältnissen gegenüber Heron nun auf Geheiss des Ptolemäers, möge es Ptolemäus XI., Alexander I. oder Ptolemäus X. oder gar Ptolemäus XIII., Neos Dionysos gewesen sein — Kenner der Ptolemäergeschichte mögen beurtheilen, wem ein solcher Befehl am Ersten zuzutrauen wäre — sein Lehrbuch verfasste, dann war auch bei geringerer Befähigung des Verfassers das zu erwarten, was bei einem heronischen Werke in erhöhtem Maasse stattfinden musste: eine so rasche vollständige Verbreitung, dass die Benennungen feldmesserisch und heronisch nachgerade synonym wurden und so der „Heron“ der Praktiker über kurz oder lang den alten wie den neuen Unsinn, den sie nicht abgestreift oder frisch angenommen hatten, mit einschloss. Die neueren Zuthaten verrathen sich meistens durch dabei auftretende byzantinische Wörter, die alten Fehler sind uns auf den letzten Seiten

der Hauptsache nach bekannt geworden. Echt heronisch wird im Grossen und Ganzen das Richtige und in altem Griechisch Dargestellte aus den heronischen Sammlungen sein.

Auch hier wieder hält freilich die Einfachheit der Auffassung, zu welcher wir gelangt sind, nicht vor. Martin, Hultsch wie Friedlein verlassen die aufgestellte Einheitstheorie des heronischen Gesammtwerkes nach einer oder der anderen Richtung. Martin nimmt, wie wir oben sahen[56]), einen Commentar zum Euklid aus Heron's Feder neben seinem grossen Werke an, und verlegt dorthin die Beweisführungen, während er das grosse Werk — nennen wir es schlechtweg die Geometrie, ohne damit über den Titel ein endgültiges Urtheil fällen zu wollen — mit zwei Einleitungscapiteln beginnen lässt, den verloren gegangenen Vorbemerkungen zu den Elementen der Arithmetik und den theilweise erhaltenen Vorbemerkungen zu den Elementen der Geometrie, welchen muthmasslich die Definitionen angehörten, die mehr oder weniger verderbt den Inhalt von 34 Druckseiten in der Hultsch'schen Ausgabe der geometrischen Schriften des Heron bilden[63]). Hultsch dagegen sieht in diesen beiden Kapiteln, über deren Ueberschriften, Inhalt und Verfasser er mit Martin einig ist, Bruchstücke einer Einführung in das Studium des Euklid[64]), wie uns scheint nicht ganz im Einklang mit der anderen auf derselben Seite in einer Anmerkung ausgesprochenen Meinung[57]), die heronischen Beweisführungen gehörten keinem Commentare zu Euklid an. Friedlein endlich glaubt nicht an den heronischen Ursprung dieser in ihrer einstigen Zusammengehörigkeit auch von ihm festgehaltenen beiden Einleitungen, indem der Wortlaut von verschiedenen auf drei Quartseiten zum Abdrucke gebrachten Stellen[65]) der Bedeutsamkeit Heron's zu sehr widerspreche. Wir verzichten auf die undankbare Aufgabe unter den drei Meinungen zu wählen oder unsere persönliche Meinung, dass nur eine Geometrie Heron's und gar kein Commentar zum Euklid oder dergleichen seiner Feder entfloss, dass also alles Geometrische, so weit es echt ist, jener Geometrie angehörte, mit Zähigkeit zu vertheidigen. Scheint uns doch verzweifelt wenig darauf anzukommen, für welche man sich

entscheiden will. Verloren sind ja die Vorbemerkungen zur Arithmetik, wer sie verfasst haben mag, verloren ein vermuthlich überwiegender Theil der Vorbemerkungen zur Geometrie, die Definitionen haben höchstens dadurch historische Bedeutung, dass die in ihnen erläuterten spirischen Flächen und Linien[66]) dem Perseus als Erfinder derselben eine Zeitepoche vor Abfassung der Definitionen zuweisen, deren wir bei dem Umstande, dass Perseus bei Geminus erwähnt wird, also auch dadurch mindestens jenseits 75 v. Chr. hinaufrückt, kaum bedürfen. Mag darum der Eine unserer Leser Anstoss daran nehmen, dass die Dioptrik, die Definitionen, die geometrischen Schriften, deren wir noch zu gedenken haben, so ganz und gar verschiedenen Charakters seien um einem Werke anzugehören; mag der Zweite diese Verschiedenheit durchweg anerkennend in ihr desshalb keinen Grund sehen die Zusammengehörigkeit aufzugeben, weil spätere Nachahmungen aus einem Gusse denselben Wechsel schriftstellerischen Charakters zeigen; mag ein Dritter entscheidendes Gewicht auf Sprach- und Denkschnitzer legend sie als Kriterium der Unmöglichkeit ansehen, dass Schriftstücke, in welchen sie vorkommen, von einem geistig hochstehenden Verfasser herrühren; mag endlich einem Vierten der Umstand den Ausschlag geben, dass in den sogenannten Definitionen Heron's grade die Figuren definirt sind, welche bei Heron mit Vorliebe behandelt werden, wir überlassen es getrost der persönlichen Neigung eines jeden Lesers, welche dieser widerstrebenden Meinungen er sich anzueignen für gut hält. Sind doch zum Glück viel wichtigere Dinge Gegenstand allgemeiner Uebereinstimmung.

So dürfte es keinem Zweifel unterworfen sein, dass in der Geometrie Heron's, wenn auch die euklidische Form ihr fehlte, keineswegs Formlosigkeit an deren Stelle trat. Besonders der Wortlaut: „Mache es so" ist ein fast regelmässig wiederkehrender[67]), und, wie wir jetzt wissen, die Nachahmung, um nicht zu sagen die Uebersetzung der altegyptischen Form der Aufgabebücher, welche von einem Griechen benutzt, während er die ihm jedenfalls geläufige euklidische Form nie in Anwendung bringt, eine neue Stütze für die Vermuthung liefert, dass beide Formen schon in

vorgriechischer Zeit nebeneinander zu verschiedenen Zwecken in Uebung waren, die eine für Lehrgebäude, die andere für Aufgabensammlungen.

Zweifel wird auch darein nicht gesetzt, dass die Geometrie des Heron aus einer planimetrischen und einer stereometrischen Abtheilung bestand, von welchen beiden wir verhältnissmässig genaue Kenntniss besitzen, und deren Ueberschriften Einleitung in die Geometrie, Einleitung in die Stereometrie gelautet haben mögen[68]). Ob die anderweitigen Titel, von denen die Handschriften uns manche aufbewahrt haben, und welche Hultsch in seiner Ausgabe des Heron ohne Bedenken benutzte[69]) und benutzen durfte, wenn auch nur um die verschiedenen Sammlungen entnommenen Stücke abzugrenzen, dereinst von Heron selbst gebrauchte Namen etwa einzelner Abschnitte waren, oder durch die Abschreiber und Zusammentrager hineingekommen sind, diese Frage ist gewiss nicht müssig, doch gestehen wir gern zu, uns ihrer Beantwortung nicht gewachsen zu fühlen.

Unsere Absicht im Nächstfolgenden geht dahin, jene Scheidungen durchaus zu vernachlässigen und dafür den Inhalt sämmtlicher Bruchstücke, so weit er uns auf Heron zurückzuweisen scheint, einmal nach dem Gegenstande zu ordnen, eine leichte, wenn auch nicht mühelose Aufgabe, und vielleicht eine dankbare Aufgabe, wenn es uns gelingen sollte dadurch übersichtlicher hervortreten zu lassen, welche Kenntnisse das Zeitalter des Heron von Alexandrien besass. Wir werden dabei zur Erhöhung dieser Uebersicht soweit modernisiren, dass wir Formeln mit allgemeinen Buchstabengrössen anzuwenden kein Bedenken tragen, während bei Heron selbst nur Zahlenbeispiele meistens in vielfältiger Häufung ausgerechnet sind, aus welchen der aufmerksame Schüler die eigentliche Regel selbst herausschälen muss. Wir beginnen mit Formeln der Planimetrie, wir lassen darauf Formeln der Stereometrie folgen, wir beleuchten zum Schlusse das arithmetisch-algebraische Gebiet, so weit Heron es beherrscht zu haben scheint.

Das Dreieck und seine Ausmessung hat Heron vielfach beschäftigt. Das gleichseitige Dreieck von der Seite a

hat zur Fläche $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}$[70]), zur Höhe $a - \frac{a}{10} - \frac{a}{30}$[71]). Es ist bemerkenswerth, dass beide Werthe zwar materiell übereinstimmen, formell dagegen von einander abweichen[72]), indem Heron bei Ausrechnung des Flächeninhaltes, sofern er Product der halben Grundlinie in die Höhe ist, die Höhe $h = \frac{2a}{3} + \frac{a}{5}$ angesetzt zu haben scheint. Es ist ferner bemerkenswerth, dass das gleichseitige Dreieck das einzige ist, bei welchem eine Ausziehung der zur Höhenberechnung unerlässlichen Quadratwurzel im Voraus erfolgen kann, und dass Heron sie in bequemer und genügender Annäherung hier mittheilt, um dem Praktiker diese Rechnung ein für allemal zu ersparen. Beim gleichschenkligen Dreiecke von den Seiten a, a, b ist die Höhe $= \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ und deren Produkt in $\frac{b}{2}$ giebt die Fläche[73]). Bei dem rechtwinkligen Dreiecke kommt es sowohl auf die Fläche als halbes Produkt der beiden Katheten[74]) an, als auf die gegenseitige Berechnung der drei Seiten aus einander unter Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes[75]), als auch auf die Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke nach den Methoden des Pythagoras und des Plato[76]), d. h. nach jenen beiden allbekannten Methoden, deren erste von einer ungraden, deren zweite von einer graden Zahl als kleinster Kathete ausgeht. Vielleicht sollten wir an dieser Stelle des Kunstausdruckes aneinanderhängender rechtwinkliger Dreiecke gedenken[77]), der in den auf uns gekommenen Beispielen freilich nur identische rechtwinklige Dreiecke von den Seiten 5, 12, 13 bezeichnet, welche an der Kathete 12 zusammenhängend in ihrer Verdoppelung ein gleichschenkliges Dreieck von den Seiten 13, 13, 10 darstellen, für den wir aber die Möglichkeit offen halten, dass überhaupt rationale rechtwinklige Dreiecke an einer gemeinschaftlichen Kathete an einander hängen, so etwa die Dreiecke 5, 12, 13 und 9, 12, 15, welche in ihrer Zusammensetzung das berühmte in jeder Beziehung rationale Dreieck 13, 14, 15 hervorbringen. Bei dem unregelmässigen Dreiecke sind zwei verschiedene Wege

eingeschlagen[78]), der eine unter unmittelbarer Benutzung der drei Seiten a, b, c, also der Formel

$$\triangle=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)},$$

der andere mittelbare unter Berechnung einer Höhe. Bei dieser letzteren Methode werden die beiden Fälle unterschieden, ob die beiden Winkel an der Grundlinie spitz sind, und die Höhe somit auf die Grundlinie selbst eintrifft, und auf derselben Abschnitte bildet, oder ob der eine Winkel an der Grundlinie stumpf ist und die Höhe somit jenseits der Grundlinie eintrifft und eine Ueberragung hervorbringt. Heissen die Seiten a, b, c, worunter b als Grundlinie gedacht ist, und heisst im ersteren Falle der an a anstossende Abschnitt α, im zweiten Falle, die jenseits a befindliche Ueberragung ε, so sind die in Anwendung gebrachten Vorschriften: $\alpha=\frac{b^2+a^2-c^2}{2b}$, $\varepsilon=\frac{c^2-b^2-a^2}{2b}$. Unter den Gesammtbegriff der Dreiecksausmessung reihen wir endlich auch die Höhenmessung einer Säule oder eines Baumes aus der Schattenlänge[79]) ein, welche mitten zwischen Stereometrischem auftretend an die Berichte erinnert, welche Thales ein solches Verfahren aus Egypten mitbringen lassen. Wir bemerken dabei, dass das Verfahren, wie es hier gelehrt ist, von der Aehnlichkeit beliebiger rechtwinkliger Dreiecke Gebrauch macht, also über die alte thaletische Methode hinausgeht, falls diese wirklich, wie Bretschneider annimmt, nur gleichschenklig rechtwinkliger Dreiecke sich bediente.

Nächst den Dreiecken haben wir von den Vierecken zu reden, deren Betrachtung jedoch meistens der der Dreiecke vorangeht, eine Reihenfolge, die nicht so ganz unwichtig ist und für deren Beurtheilung wir unsere Leser bitten, sich an das zu erinnern, was Seite 35 auseinandergesetzt wurde. Auch bei dem Vierecke sind zahlreiche Gattungen unterschieden. Das Quadrat von der Seite a lässt seine Fläche a^2 wie seine Diagonale $\sqrt{2a^2}$ leicht ermitteln[80]). Weniger einfach ist schon die Aufgabe[81]), die Seite a des Quadrates zu finden, welches in ein gleichschenkliges Dreieck von der Grundlinie b und dem Flächeninhalte $\triangle$ ein-

gezeichnet werden kann; hier findet sich die Höhe des Dreiecks $h = \frac{2\triangle}{b}$ und $a = \frac{b\,h}{b+h}$. Das Rechteck[82]) schliesst sich mit der Berechnung seiner Fläche wie seiner Diagonale unmittelbar an das Quadrat an. Bei dem Rhombus[83]), d. h. dem gleichseitigen nicht rechtwinkligen Vierecke ist von der Eigenschaft Gebrauch gemacht, dass in ihm die beiden Diagonalen sich rechtwinklig halbiren, also das halbe Product derselben die Fläche messen muss. Das Parallelogramm[84]) zerfällt durch eine Diagonale, welche den stumpfen Winkel desselben theilt, in zwei congruente, an der Grundlinie spitzwinklige Dreiecke, die Abschnitte der Grundlinie[78]), sowie die Höhe und daraus die Fläche zu ermitteln, ist daher nur Anwendung bekannter Formeln. Demnächst folgt das Paralleltrapez[85]), wovon drei Untergattungen hervortreten: das rechtwinklige, das gleichschenklige und das ungleichseitige, welches letztere aber auffallenderweise als stumpfwinkliges Trapez auftritt im Gegensatze zu einem sogenannten spitzwinkligen Trapeze, welches gar keine unter sich parallele Seiten besitzt. Offenbar ist hier Manches verderbt, wenn wir auch nicht so weit gehen, mit Martin hier nur Unterscheidungen eines unwissenden Feldmessers des V. S. sehen zu wollen, oder mit Friedlein es nicht glaublich zu finden, dass Heron von einem gleichschenkligen Paralleltrapeze gesprochen haben sollte[86]). Grade das gleichschenklige Trapez und das rechtwinklige halten wir für so echt heronisch, wie irgend einen Theil seiner Schriften. Jenes, die Lieblingsfigur der egyptischen Feldmesser, durfte er unter keinen Umständen unbesprochen lassen; dieses behandelte er, um zu zeigen, dass es in der That einen Fall gebe, in welchem wenigstens das arithmetische Mittel eines Seitenpaares vervielfacht zwar nicht mit dem Mittel des anderen Seitenpaares, aber mit einer der beiden anderen Seiten wirklich den Flächenraum des Vierecks genau angebe. Hat doch Heron sicherlich auch bei Behandlung der unregelmässigen Vierecke das Publikum, für welches er schrieb, nie ausser Augen gelassen. Das beweisen die vielfachen, oftmals unnöthigen Zerlegungen der Figuren durch Hülfslinien, deren Heron in Nachahmung dessen, was in der

egyptischen Feldmesswissenschaft gesund geblieben war, sich grade in diesem Abschnitte am häufigsten bedient, Zerlegungen, welche auch bei Pediasimus, dem nachahmenden Benutzer heronischer Schriften im XIV. S., erhalten sind. Dass wir dagegen Heron nicht zutrauen, er habe die beiden falschen egyptischen Formeln $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c}{2}$ für die Fläche des Dreiecks, $\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{b_1+b_2}{2}$ für die Fläche des Vierecks in sein Werk mit aufgenommen, darüber dürfte uns Niemand leicht zur Rede stellen. Diese falschen Formeln finden sich in heronischen Schriften und zwar je eine in einer der meist entstellten Sammlungen[87]), aber sie haben sich ohne allen Zweifel nur eingeschmuggelt, allerdings wahrscheinlich in sehr früher Zeit, so dass sie zugleich mit den richtigen Formeln den Uebergang nach Rom zu machen im Stande waren. Ob wir egyptische Ueberbleibsel auch in einigen Kunstausdrücken zu erkennen haben, welche nur oder zuerst in griechischer Sprache bei Heron sich finden, darüber gehen die Meinungen auseinander. Martin hält sie für egyptisch[88]) und wenn wir seiner Meinung mindestens für die „Scheitellinien“ der Figuren uns anschliessen, welchen ein besonderer Name beigelegt ist, der uns verketzert im folgenden Abschnitte wieder begegnen wird, so unterstützen wir damit vielleicht rückwärts die Meinung, welche in dem Worte *merit* des mathematischen Papyrus auch den Namen der Scheitellinie erkennen will. Weniger sicher sind wir über die zweimal auftretende Benennung „stumpfe Linie“ für den einen Schenkel eines stumpfen Winkels. Möglicherweise ist es dagegen egyptische Reminiscenz, dass die Wörter „Breite“ und „Höhe“ beim Rechtecke nicht örtlich bestimmte Seiten, sondern jenes die kleinere, dieses die grössere Seite bedeutet, so zwar, dass nach Einzeichnung zerlegender Hülfslinien, ohne dass eine Drehung der Figur vorgenommen wäre, plötzlich Höhe heisst, was in der ungetheilten Figur Breite war[89]). Als vielleicht vorschwebendes Muster erinnern wir nämlich an das egyptische Wort *ka*, dessen Hieroglyphe ein die Arme in die Höhe streckendes Männchen ist, und welches nach Brugsch sowohl Höhe als all-

gemeiner die grösste Ausdehnung eines Raumgebildes bedeutet.

Doch wir gehen in der Darstellung dessen, was an planimetrischen Kenntnissen in heronischen Schriften anzutreffen ist, weiter zu den regelmässigen Vielecken über. Zwei Aufgaben sind behandelt. In der ersten handelt es sich um Auffindung der Fläche F_n des regelmässigen n-Ecks aus dessen Seite a_n. Wir stellen den heronischen Werthen[90]) die auf 6 Decimalstellen genau gerechneten wirklichen Werthe zur Vergleichung gegenüber, wobei eine meistens sehr genügende Annäherung hervortritt:

	richtig ist:
$F_3 = \frac{13}{30} a_3^2 = 0{,}433333\, a_3^2$	$F_3 = \frac{3}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{3} a_3^2 = 0{,}433012\, a_3^2$
$F_4 = a_4^2 = 1{,}000000\, a_4^2$	$F_4 = \frac{4}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{4} a_4^2 = 1{,}000000\, a_4^2$
$F_5 = \frac{12}{7} a_5^2 = 1{,}714285$ u. $= \frac{5}{3} a_5^2 = 1{,}666666\, a_5^2$	$F_5 = \frac{5}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{5} a_5^2 = 1{,}720477\, a_5^2$
$F_6 = \frac{13}{5} a_6^2 = 2{,}600000\, a_6^2$	$F_6 = \frac{6}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{6} a_6^2 = 2{,}598176\, a_6^2$
$F_7 = \frac{43}{12} a_7^2 = 3{,}583333\, a_7^2$	$F_7 = \frac{7}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{7} a_7^2 = 3{,}633910\, a_7^2$
$F_8 = \frac{29}{6} a_8^2 = 4{,}833333\, a_8^2$	$F_8 = \frac{8}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{8} a_8^2 = 4{,}828427\, a_8^2$
$F_9 = \frac{51}{8} a_9^2 = 6{,}375000\, a_9^2$ u. $= \frac{38}{6} a_9^2 = 6{,}333333\, a_9^2$	$F_9 = \frac{9}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{9} a_9^2 = 6{,}181824\, a_9^2$
$F_{10} = \frac{15}{2} a_{10}^2 = 7{,}500000\, a_{10}^2$	$F_{10} = \frac{10}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{10} a_{10}^2 = 7{,}694208\, a_{10}^2$
$F_{11} = \frac{66}{7} a_{11}^2 = 9{,}428571\, a_{11}^2$	$F_{11} = \frac{11}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{11} a_{11}^2 = 9{,}370872\, a_{11}^2$
$F_{12} = \frac{45}{4} a_{12}^2 = 11{,}250000\, a_{12}^2$	$F_{12} = \frac{12}{4} \text{ cotg. } \frac{180^0}{12} a_{12}^2 = 11{,}196152\, a_{12}^2$

In der zweiten Aufgabe handelt es sich um den Zusammenhang der Seite a_n des n-Ecks und des Durchmessers d_n des ihm umschriebenen Kreises[91]). Hier ist eine ganz allgemeine Formel $d_n = \frac{n}{3} a_n$ benutzt, welche eine sehr schlechte Annäherung gewährt. Genau ist nämlich bekanntlich

$$a_n = \sin \frac{180^0}{n} \cdot d_n,$$

es müsste also sein $\sin \frac{180^0}{n} = \frac{3}{n}$, welches zwar bei $n = 6$ richtig ist, bei jedem anderen n aber kaum entfernt zutrifft.

Sind nun diese beiden Aufgaben nebst ihren Auflösungen in der hier angegebenen Gestalt bis auf Heron zurückzuführen? Wir sprechen die Frage aus, auf die bestimmte Beantwortung verzichten wir. Nur so viel mag bemerkt sein, dass trigonometrische Dinge, und auf solche kommen die beiden Aufgaben schliesslich hinaus, wie man sie nun ausspreche, schon 50 Jahre vor Heron den Alexandriner Hypsikles und den nur wenige Jahre jüngeren Hipparch beschäftigten. Es sei im Gegensatze zu den angeführten Formeln hervorgehoben, dass Hypsikles und Hipparch sich der Sexagesimalbrüche bedienten. Es sei endlich zur Unterstützung etwaigen Zweifels, ob Heron für die so mangelhafte Lösung der zweiten Aufgabe verantwortlich gemacht werden dürfe, auf eine vollständig richtige Darstellung des Verhältnisses von d_8 zu a_8 hingewiesen, welche ganz gelegentlich bei der Berechnung eines Pyramideninhaltes auftritt, aber, wie wir meinen, grade in dieser gelegentlichen Benutzung, abseits jeder zusammenhängender Betrachtung analoger Fälle, unser Zutrauen um so mehr rechtfertigt, abgesehen davon, dass mit ihr eine Construction des Achtecks aus dem Quadrate in Einklang steht, von welcher im dritten Abschnitte die Rede sein muss. Dort wird gerechnet $\left(\frac{d_8}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$, eine Formel, welche mit $\left(\frac{d_8}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\, a_8^2$ übereinstimmt, deren Richtigkeit an $a_8 = d_8 \cdot \sin 22^0\, 30'$ leicht zu prüfen ist. Noch wichtiger wäre die Beantwortung der Frage, auf welchem Wege wohl die mitgetheilten Formeln der ersten Aufgabe gewonnen worden sein mögen? Auch hier genüge es uns die Frage aufgeworfen zu haben.

Dem Kreise und Theilen desselben sind mehrfache Untersuchungen gewidmet. Von dem einem regelmässigen Vielecke umschriebenen Kreise haben wir soeben berichtet. Ebendahin gehören die Formeln für die Durchmesser δ und d der einem Dreiecke von den Seiten a, b, c und der Fläche $\triangle$ eingeschriebenen und umschriebenen Kreise[92]). Bekanntlich ist $\delta = \frac{4\triangle}{a+b+c}$, $d = \frac{a \cdot b \cdot c}{2\triangle}$ oder, wenn b die Grundlinie,

h die zugehörige Höhe des Dreiecks heisst, also $2 \triangle = b \cdot h$ ist, auch $d = \frac{a \cdot c}{h}$. Diese letztere Gleichung für d, die unveränderte Gleichung für δ sind es, welche angewandt werden. Dass nämlich im Dreiecke 13, 14, 15 ohne Weiteres $d = \frac{13 \cdot 15}{12}$ gesetzt wird, beruht einzig auf Wegfall der Bemerkung, in diesem Dreiecke habe eben die Höhe die Länge 12. Die hauptsächlicheren Fragen jedoch, welche hier zu erwähnen sind, gehen auf Fläche und kreisförmige Umgrenzung des ganzen wie des halben Kreises und des Kreisringes[93]). Die Länge der Kreislinie als Product des Durchmessers in eine gegebene Verhältnisszahl, die Kreisfläche als Product des vierten Theiles derselben Verhältnisszahl in das Quadrat des Durchmessers, der Kreisring als Unterschied der grösseren und kleineren Kreisfläche, der Halbkreis als durch Halbirung des ganzen Kreises nach Fläche und Bogenlänge entstanden, sie alle weichen kaum von der Behandlung ähnlicher Aufgaben in unseren heutigen Lehrbüchern ab, nicht einmal darin, dass das Gefühl der Formel über das des geometrischen Inhaltes überwiegt, wir meinen, dass man die Ueberzeugung gewinnt, gewisse Ausdrücke seien nur erstmalig an einer Figur abgeleitet, und dann habe man mit diesen Ausdrücken, wir möchten sogar sagen mit diesen Gleichungen gerechnet, sei es zur Behandlung gleichlautender Aufgaben mit anderen Zahlenwerthen, sei es zur Vertauschung der gegebenen und gesuchten Grössen in der ursprünglichen Aufgabe. Wir haben von der Verhältnisszahl der Kreisperipherie zum Durchmesser gesprochen, von jener Zahl, welche die Mathematiker durch den Buchstaben π zu bezeichnen gewohnt sind. Man weiss, dass Archimed um 240 v. Chr. einen sehr brauchbaren Näherungswerth dieses Verhältnisses mit $\pi = \frac{22}{7}$ aufstellte und wird sich daher auch nicht anders erwarten, als dass Heron derselben Zahl sich bediente. In den weitaus häufigsten Fällen trifft diese Erwartung zu, wobei höchstens auffallen möchte, dass die Erfindung des Werthes $\pi = \frac{22}{7}$ dem Euklid zugeschrieben wird[94]). Nur in eine Sammlung hat der Werth $\pi = 3$ sich eingeschlichen[95]), offenbar nicht heronisch,

mag es nun ein Erbtheil alter wahrscheinlich babylonischer[95a]) Uebung oder eine Errungenschaft junger Unwissenheit sein. Der Werth $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$, den wir als altegyptisch oben kennen gelernt haben, findet sich dagegen nirgend weder in heronischen Schriften, noch bei den Schülern derselben.

Negative Erscheinungen erklären zu wollen, ist stets eine missliche Sache, doch wären wir hier am Wenigsten in Verlegenheit mögliche Gründe anzugeben. Die Neuerung $\pi = \frac{22}{7}$ statt $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ war durch die grössere Genauigkeit der Ergebnisse bedeutsam, aber was die Rechnungsausführung betrifft, kaum redenswerth. Ob der Praktiker mit dieser oder mit jener gebrochenen Zahl vervielfachte, das konnte ihm gleich sein. Er musste aus Bequemlichkeit die alten falschen Dreiecks- und Viereckformeln ohne Wurzelausziehung festzuhalten suchen, den neuen Methoden gegenüber, welche jene für ihn schwierige Rechnungsoperation von ihm verlangten; er konnte $\pi = 3$ als ganzzahligen Multiplikator vorziehen, aber dass er nicht auf $\pi = \frac{256}{81}$ zu Gunsten von $\pi = \frac{22}{7}$ verzichten sollte, dafür gab es gar keinen Grund, selbst wenn dieser letztere Werth ihm jetzt erst ganz neu entgegentrat. Schenkten wir übrigens einer im Spätherbst 1873 aufgetauchten Vermuthung Glauben, so wäre Solches nicht der Fall, den Egyptern vielmehr sogar der Werth $\pi = 3,14$ schon längst bekannt gewesen[96]). Der Fussboden der Vorkammer in der grossen Pyramide soll nämlich aus zweierlei Steinarten bestehen. Während dessen ganze Länge 116,26 Pyramidenzoll messe, seien 103,03 Zoll davon in Granit, der kleine Rest in Kalkstein ausgeführt, wobei die Messungen auf 2 Einheiten der niedrigsten Decimale genau seien. Ist nun $\pi = 3,14$, so folgt wirklich

$$\frac{\pi}{4} \cdot 116,26^2 = 103,03^2$$

mit einem Unterschiede von etwa 5 Einern, also die ganze Länge ungefähr der Durchmesser des Kreises, dessen Inhalt dem Quadrate des granitnen Theiles gleich ist. Andere Spielereien mit denselben Zahlen, wie z. B. $116,26 \cdot 3,14 = 365,24$

die Jahresdauer in Tagen u. s. w. sollen den endgültigen Beweis der Vermuthung liefern. Da es nach des Verfassers Ausspruch teuflisch wäre, noch länger im Irrthum zu verharren, so glaubten wir dem Seelenheile unserer Leser die Verweisung auf die scharfsinnige und sonderbare Auseinandersetzung nicht vorenthalten zu dürfen.

Wir haben oben bei den Vielecken Leistungen auf gewissermassen trigonometrischem Gebiete kennen gelernt. Demselben Gebiete gehören auch die Formeln an, welche Kreisabschnitte und Kreisbogen berechnen lassen, welche kleiner oder grösser als der Halbkreis sind, denn diese Formeln ersetzen ja in ihrer näherungsweisen Gültigkeit den Mangel trigonometrischer Tabellen. Für die Geometer gab es solche Tabellen bekanntlich auch noch später, auch noch nach Claudius Ptolemäus, dem grossen rechnenden Astronomen, nicht, da die Geodäsie jene astronomischen Hülfsmittel noch Jahrhunderte lang unbenutzt liess. Nennen wir s eine Sehne, A den kleineren, A' den grösseren Kreisabschnitt, welchen sie bespannt, B und B' die Kreisbögen, welche jene Abschnitte zugleich mit der Sehne begrenzen, h und h' die Höhen der Abschnitte, d. h. die Senkrechten, welche in der Mitte der Sehne bis zum Durchschnitte mit B beziehungsweise mit B' errichtet sind, so dass A und A' sich zum Kreisinhalte K, B und B' sich zur Kreisperipherie P, h und h' sich zum Durchmesser d ergänzen, so lehrt Heron[97]), dass $A = \frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{(s/_2)^2}{14}$, dass $A' = K - A$, dass aber auch $A' = \frac{(s+h')\,h'}{2}\left(1 + \frac{1}{21}\right)$, Formeln, deren Ableitung für uns noch zu den ungelösten Problemen gehört, und von welchen nur so viel ersichtlich ist, dass sie für den Fall des Halbkreises, also bei $s = d$, $h = \frac{d}{2}$, $h' = \frac{d}{2}$ und $\pi = \frac{22}{7}$, sich als richtig erweisen. Auch diese schwache Genugthuung versagen uns die Formeln für die Bogenlänge[98]):

$$B = \sqrt{s^2 + 4h^2} + \frac{h}{4} \text{ und } B = \left((s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right)$$
$$+ \frac{h}{s}\left((s+h) - \frac{h}{s}(s+h)\right),$$

bei welcher Letzteren wir auf die eigenthümliche Gestalt der Rechnung hinweisen, auf die wir weiter unten zurückzukommen haben.

Erwiesen sich somit die planimetrischen Theile der unter Heron's Namen gesammelten Schriften als mannigfach bemerkenswerth, als Gelegenheit zu neuen Untersuchungen bietend, deren einige hier angedeutet werden konnten, erwies sich insbesondere eine erhebliche Zahl von Sätzen so alterthümlichen Gepräges, dass an das Vorkommen derselben bei Heron Zweifel nicht obwalten können, so verhalten sich die stereometrischen Theile wesentlich anders. Ein grosser Theil des Interesses, welches die dort vorkommenden Fragen einflössen könnten und müssten, verflüchtigt sich unter den vergeblichen Versuchen den Sinn des vielfach entstellten Textes zu ermitteln. Nein, diese Stereometrie ist unmöglich so aus Heron's Feder hervorgegangen, wie sie gegenwärtig uns zur Verfügung steht; das hat Martin bereits gründlich nachgewiesen[99]). Missverstandene Weglassungen, unverstandene Zusätze haben gleichmässig an der ursprünglichen Gestalt gesündigt. Wir müssen uns begnügen nur einige wenige Einzelheiten hervorzuheben, welche in ihrer Deutung keinem Zweifel unterworfen sind. Die Stereometrie beginnt mit der Kugel[100]) und zwar mit den archimedischen Sätzen von diesem Körper, welche in dem Inhalte zwei Dritttheile des Inhaltes des sie einschliessenden Cylinders erkennen lassen, in der Oberfläche das Vierfache der Fläche eines grössten Kreises, so dass also der Inhalt durch $\frac{11}{21} d^3$, die Oberfläche durch $\frac{4 \cdot 11\, d^2}{14}$ gemessen wird. Ob die Ausmessung der Kugelcalotte mit

$$\left(\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2\right) \frac{22}{7}$$

für die Oberfläche, mit $\left(3\,h \left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^3\right) \frac{11}{21}$ für den Körperinhalt heronisch ist, in welchen Formeln s den Durchmesser des Kreisschnittes, welcher als Grundfläche des Kugelabschnittes erscheint, h die senkrechte Höhe des Abschnittes von dieser Grundfläche bis zu dem höchsten Punkte be-

zeichnet, wagen wir nicht mit Sicherheit zu entscheiden. Für Heron's Autorschaft spricht jedenfalls eine gewisse Aehnlichkeit mit den Formeln für die Kreisabschnitte, welche darin besteht, dass auch hier die Gleichung genau richtig ist, sobald die Halbkugel als Kugelabschnitt betrachtet, also $s = d$, $h = \frac{d}{2}$ gewählt wird. Richtig ist Inhalt und Oberfläche des graden Kegels, Inhalt des graden Kegelstumpfes angegeben; richtig der Inhalt des Cylinders, des Würfels, des Parallelopipedums, welche sich fast unmittelbar aneinanderreihen[101]). Ob die nun folgende Ausmessung verschiedener Körper nach richtigen Regeln vorgeschrieben ist, wäre nur dann festzustellen, wenn die Gestalt dieser Körper selbst ganz zweifellos wäre, was man leider nicht behaupten kann. Unzweideutig erkennen wir nur die Pyramide, welche vollständig und abgestumpft, mit quadratischer, mit gleichseitig dreieckiger, mit rechtwinklig dreieckiger, mit regelmässig viereckiger Grundfläche in verschiedenen Sammlungen auftritt, von welcher auch der Satz aus dem 12. Buche der Elemente angeführt wird, dass jedes dreiseitige Prisma in drei gleiche Pyramiden zerfalle, nebst der daraus gezogenen Folgerung, dass demnach jede beliebige Pyramide ein Drittel des Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe sei[102]). Insbesondere bei den abgestumpften Pyramiden machen sich nachträglich eingeschlichene Fehler unangenehm bemerklich, welche wir Heron eben so wenig zuschieben möchten, wie jene allgemeine Vorschrift[103]) eine nicht regelmässige Oberfläche, etwa die einer Bildsäule zu messen, welche darin besteht, Leinwand oder Papier herumzuwickeln, welches dann ausgebreitet als Maass diene.

Wir verlassen damit das geometrische Gebiet und wenden uns zu der Rechenkunst und zu der Algebra des Heron von Alexandrien. Wir bleiben damit freilich nicht innerhalb der durch unseren Hauptzweck uns gesteckten Schranken, allein wenn wir dieselben in diesem Abschnitte schon zu Gunsten des Mechanikers Heron überschreiten durften, dessen Thätigkeit doch dem nicht ganz fremd bleiben darf, der die Bedeutung und damit die Wirksamkeit jenes Mannes

verstehen will, so wird auch diese letzte Abschweifung uns gestattet werden müssen. Wir haben hier Heron als Schüler der Egypter, wie als Lehrer der Griechen vor uns, wir sehen an einzelnen Beispielen die allmälige Entstehung von Gegenständen vor uns, welche manche Geschichtsforscher noch immer bei Diophantus erst beginnen lassen wollen.

Wir haben bei anderer Gelegenheit schon bemerkt[104]), dass durch einen missgünstigen Zufall die Schriften des Alterthums über Rechenknnst bis auf geringe Ueberbleibsel uns verloren gegangen sind. Freilich entstand dem erhaltenen Material inzwischen ein erwünschter unverhoffter Zuwachs in jenem mathematischen Papyrus, den wir zu erwähnen hatten, und dessen, wie S. 32 hervorgehoben wurde, einem Uebungsbuche der Rechenkunst ähnlichste Charakter ihn grade hier zum Gegenstande unserer eingehenden Besprechung machen müsste, wenn wir nicht zu befürchten hätten, befreundetes Gehege dabei zu durchbrechen. Ist es doch, auch wenn wir uns durchaus auf Benutzung des bereits Veröffentlichten beschränken[59]), ganz unmöglich heronische Rechenkunst zu erläutern, ohne zugleich und ohne es zu beabsichtigen zu den Rechenmethoden der Egypter einen Commentar zu liefern, so sehr ähnelt das Verfahren des Einen dem der Anderen, so sehr hängt Heron von den Egyptern in diesem Falle durchaus nachweislich ab. Gleichheit des Materials, mit welchem gerechnet wird, Gleichheit der Form, in welcher die Aufgaben gestellt sind, Gleichheit des Verfahrens, nach welchem die Aufgaben gelöst werden, von jedem Einzelnen wird man zukünftig, wenn die Uebersetzung des Papyrus erst in allen Händen sein wird, mehrfache Beispiele zu geben nicht in Verlegenheit sein. Heute wissen wir schon, dass die Egypter mit ganzen Zahlen und mit Stammbrüchen rechneten, d. h. mit solchen Brüchen, deren Zähler die Einheit ist und ausserdem mit dem Bruche $\frac{2}{3}$, der dieses häufigen Vorkommens wegen auch den Stammbrüchen zugezählt werden mag, wiewohl er der strengen Definition nach kein solcher ist. Auch Heron benutzt zwar durchaus nicht immer, aber mit grosser Vorliebe solche Stammbrüche. Eine egyptische Aufgabe[105]) ist bekannt, deren Wortlaut „$\frac{2}{3}$ hinzu $\frac{1}{3}$ hinweg Rest 10“ er-

läutert wird durch die moderne Gleichung

$$\left(x+\frac{2}{3}\,x\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}\,x\right)=10.$$

Man stelle dem etwa gegenüber den Wortlaut jener Regel für die Bogenlänge[98]) bei Heron, bei welchem, wie immer, die ohne Additionszeichen hinter den ganzen Zahlen stehenden Stammbrüche als zu einer Summe mit ihnen zu vereinigend gedacht sein sollen: „Es sei ein Abschnitt und er habe die Grundlinie von 40 Fuss, die Höhe von 10 Fuss; seinen Umfang zu finden. Mache es so. Füge immer Durchmesser (soll heissen: Grundlinie) und Höhe zusammen. Es entstehen 50 Fuss. Nimm allgemein davon ein Viertel weg. Es ist $12\frac{1}{2}$. Rest $37\frac{1}{2}$. Zu diesem füge allgemein ein Viertel hinzu. Es ist $9\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. Setze zusammen. Es sind Fusse $46\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. So viele misst der Umfang des Abschnittes. Wir haben aber ein Viertel weggenommen und ein Viertel hinzugefügt, weil ein Viertel der Theil ist der Höhe von der Grundlinie.“ Die Aehnlichkeit ist zu gross, um nicht den verwandschaftlichen Zusammenhang zu bezeugen, der dadurch nicht beeinträchtigt wird, dass lakonische Kürze einer breiteren Ausdrucksweise weichen musste. Von der Gleichheit des Verfahrens können wir allerdings nur einseitige Belegstücke bringen. Als Muster der Multiplikationen bei Heron wollen wir auch wieder ein Beispiel in seinem Wortlaute anführen[106]): „Aus dem Durchmesser und dem Umfang die Fläche des Kreises finden. Mache es so. Nimm ein Viertel des Umfangs, also die 12 Schoinien und den Bruch $\frac{31}{35}$ und vervielfache sie mit dem Durchmesser, das ist mit 16 Schoinien und $\frac{14}{35}$. So: 12 mal 16 ist 192, und 12 mal $\frac{14}{35}$ ist $\frac{168}{35}$, und $\frac{31}{35}$ mal 16 ist $\frac{496}{35}$ und $\frac{31}{35}$ mal $\frac{14}{35}$ ist $\frac{434}{35}$ von $\frac{1}{35}$, welches auch ist $\frac{12}{35}$ und $\frac{14}{35}$ von $\frac{1}{35}$. Zusammen Schoinien 192 und $\frac{676}{35}$ und $\frac{14}{35}$ von $\frac{1}{35}$. Die $\frac{676}{35}$ erzeugen durch 35 theilend 19 und $\frac{11}{35}$. Die 19 Schoinien werden zu den anderen 192 hinzugefügt und so entstehen zusammen $211\frac{11}{35}$ und $\frac{14}{35}$ von $\frac{1}{35}$, welche letzteren $\frac{14}{35}$ von $\frac{1}{35}$ auch $\frac{2}{5}$ von $\frac{1}{35}$ sind. Die $11\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$ von $\frac{1}{35}$ werden beim Theilen durch 35 zu $\frac{1}{4}\ \frac{1}{25}\ \frac{1}{28}$. Dann nimm $\frac{1}{4}$ von 35, es ist $8\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$; und $\frac{1}{25}$ von 35, es ist $1\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$ und $\frac{1}{28}$ von 35, es ist $1\frac{1}{4}$. Also ist der Inhalt des Kreises: Schoinien $211\frac{1}{4}\ \frac{1}{25}\ \frac{1}{128}$.“ Man

brauchte in diesem Beispiele nur hieroglyphische Zahlzeichen einzusetzen und den Wortlaut etwas knapper zu halten, um zu glauben, ein Beispiel des mathematischen Papyrus Rhind vor sich zu haben. Gegen Ende der Aufgabe ist ein kleiner Gedankensprung vorhanden, auf welchen wir aufmerksam machen müssen. Erst ist von $\frac{11}{35} + \frac{\frac{44}{35}}{35} = \frac{15\frac{2}{5}}{35}$ die Rede, wenn wir jetzt diese kürzere Bezeichnung uns gestatten, dann plötzlich von $\frac{11\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}}{35}$. Die Umwandlung $11\frac{2}{5} = 11\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$ ist also stillschweigend vorausgesetzt, wie es ja einleuchtet, dass eine solche Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in eine Summe von Stammbrüchen eine überaus häufig auftretende Aufgabe sein musste.

Der grosse Vortheil einer ausschliesslichen Benutzung von Stammbrüchen beim eigentlichen Rechnen besteht darin, dass man nur zu theilen, nicht abwechselnd zu theilen und zu vervielfachen hat, wie wenn gewöhnliche Brüche mit von der Einheit verschiedenen Zählern in Frage kommen, und warum sollte man diesen Vortheil sich nicht sichern? In der That sehen wir die Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in eine Summe von Stammbrüchen, wie die Egypter sie kennen mussten, wie aus Heron Beispiele in grosser Häufigkeit angeführt werden könnten, auch später sich erhalten. Die Wissenschaft in ihren Anwendungen auf das tägliche Leben ist conservativ, sie ist es in erhöhtem Grade, wo Gewohnheit und Bequemlichkeit zusammentreffen, ein altes Verfahren doppelt ehrwürdig und beliebt zu machen. Wir haben in den falschen Formeln für die Flächen des Dreiecks und des Vierecks ein hässliches Beispiel dieser Art angekündigt; berechtigtes Fortleben erlangten die Stammbrüche. Wie die Griechen sie den Egyptern entlehnten, so finden wir ebendieselben, ob mittelbaren oder unmittelbaren Ueberganges wollen wir nicht entscheiden, bei den Arabern. Wir finden sie im mittelalterlichen Italien. Aus Italien kam das Rechnen mit Stammbrüchen gegen das XV. S. hin nach Deutschland, wo es als „wälsche Praktik“ sich einbürgerte. In kaufmännischen Kreisen hat es sich theilweise bis auf den heutigen Tag fortgeerbt, in England unter dem Namen *Practice*, ein Ueberrest der vorerwähnten, einst in Deutsch-

land üblichen Benennung[107]). Wie wurde nun die zur Anwendung von Stammbrüchen nothwendige Umformung gewöhnlicher Brüche vorgenommen? Hankel hat in seinem nachgelassenen Werke: Zur Geschichte der Mathematik S. 62 diese Frage sich vorgelegt und folgendermassen beantwortet: „Die griechischen Feldmesser zerlegen z. B.

$$\tfrac{12}{13} \text{ in } \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{78},$$

wozu sie etwa so gelangt sein werden: der grösste in $\frac{12}{13}$ enthaltene Stammbruch ist $\frac{1}{2}$; wird dieser abgesondert, so erhält man $\frac{12}{13} = \frac{6\frac{1}{2}}{13} + \frac{5\frac{1}{2}}{13} = \frac{1}{2} + \frac{5\frac{1}{2}}{13}$. Der grösste in dem letzten enthaltene Stammbruch ist $\frac{1}{3}$; man setzt demnach

$$\frac{5\frac{1}{2}}{13} = \frac{4\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{6}}{13} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{78}.\text{“}$$

Dass Hankel in der Wahl und Behandlung dieses Beispieles glücklich gewesen sei, ist nicht zu behaupten. Hätte ein griechischer Feldmesser $\frac{12}{13}$ zu zerlegen gehabt, so würde er nach Hankel's Methode gesagt haben: der grösste darin enthaltene Stammbruch ist $\frac{2}{3}$; wird dieser abgesondert, so erhält man $\frac{12}{13} = \frac{8\frac{2}{3}}{13} + \frac{3\frac{1}{3}}{13} = \frac{2}{3} + \frac{3\frac{1}{3}}{13}$. Der grösste in dem letzten enthaltene Stammbruch ist $\frac{1}{4}$; man setzt demnach

$$\frac{3\frac{1}{3}}{13} = \frac{3\frac{1}{4} + \frac{1}{12}}{13} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{156},$$

zusammen $\frac{12}{13} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{156}$. Ganz richtig ist also jene Vermuthung gewiss nicht. Nichtsdestoweniger ist so viel Wahrheit in ihr enthalten, dass man, wie der Verfasser dieses Buches in einem Referate über Hankel sich ausdrückte[108]), wohl sagen darf, es sei gelungen, dem Verfahren der griechischen Feldmesser zur Zerlegung eines gewöhnlichen Bruches auf die Spur zu kommen. Die weitere Verfolgung dieser Spur wird erst durch die Regeln ermöglicht, welche im Jahre 1202 Leonardo von Pisa der Oeffentlichkeit übergab. Wir nehmen keinen Augenblick Anstand, in diesen Regeln der Hauptsache nach Jahrtausende lang von Mund zu Mund fortgepflanzte Vorschriften zu erkennen, endlich zu Papier gebracht, oder sagen wir lieber, in einer ihrer Aufzeichnungen endlich vor dem Untergange bewahrt. Das Alterthümliche in dem von Leonardo Vorgetragenen kennzeichnet

sich in allererster Linie dadurch, dass nicht weniger als 7 besondere Fälle unterschieden werden, an welche sich dann noch eine letzte allgemeine Vorschrift anknüpft. Es würde zu weit führen, wenn wir an diesem Orte auf die Sonderfälle eingehen wollten. Wir begnügen uns zu berichten, dass eine Hülfstabelle vorhanden, woraus die Zerlegung sämmtlicher Brüche mit den Nennern 6, 8, 12, 20, 24, die Zerlegung ziemlich vieler Brüche mit den Nennern 60 und 100 ohne Weiteres entnommen werden kann, und gehen unmittelbar zur allgemeinen Regel über, welche wir ziemlich wörtlich übersetzen, wie folgt: „Es giebt in ähnlichen Dingen eine andere allgemeine Regel, nämlich eine viele Theiler in sich schliessende Zahl wie 12 oder 24 oder 36 oder 48 oder 60 oder irgend eine andere zu suchen, welche grösser als die Hälfte oder kleiner als das Doppelte der unter dem Bruchstriche befindlichen Zahl sei. Ist etwa $\frac{17}{29}$ gegeben, so wählen wir 24 als grösser als die Hälfte von 29 und multipliciren die über dem Bruchstriche stehende 17 mit 24 zu 408; diese theilen wir durch 29, dann durch 24 und bekommen $\frac{14\frac{2}{29}}{24}$. Wir sehen nach, welche Zerlegung $\frac{14}{24}$ gestattet; es ist entweder $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{12}$. Diese bewahren wir uns als Theile von $\frac{17}{29}$ und sehen weiter, welcher Theil von 24 die 2 sind, welche über 29 stehen; es ist $\frac{1}{12}$ derselben, also $\frac{1}{12\,.\,29}$ oder $\frac{1}{348}$, weil $\frac{2}{29}$ von $\frac{1}{24}$ dasselbe sind wie $\frac{2}{24}$ von $\frac{1}{29}$. Somit ist $\frac{17}{29} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{348}$ oder $= \frac{1}{2}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{348}$. Ebenso, wenn die über 29 stehenden 17 mit 36 vervielfacht werden, wie man sie mit 24 vervielfachte, und dann die Theilung durch 29 und 36 erfolgt. Man erhält $\frac{21\frac{3}{29}}{36}$; die 21 sind $\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}\,\frac{1}{12}$, die 3 über 29 sind $\frac{1}{12}$ von 36 u. s. w." Wir weisen darauf hin, dass die Hülfszahlen 24 und 36 in der That grösser als $\frac{29}{2}$ und kleiner als $2 . 29$ sind, wie vorgeschrieben war. Im Uebrigen genüge es, dieses eine Beispiel genauer mitgetheilt zu haben. Wer eine eingehendere Kenntniss des ganzen Gegenstandes gewinnen will, wird unter allen Umständen die Quelle selbst zu Rathe ziehen müssen.

Zufälle, wie der eben benutzte, den wir damit verglei-

chen könnten, dass wenn auch nicht der Körper, so doch die Mumie eines vor Jahrtausenden der Erde Uebergebenen wieder an das Tageslicht hervorgelangt, sind im Ganzen leider recht selten, oder man hat wenigstens die Mumie nicht immer ihrer Hüllen entkleiden, sie identificiren können. Darum sind wir eben über so viele Punkte in der Geschichte der Wissenschaften noch im Unklaren, über so viele, dass es mitunter schon verdienstlich sein kann, auf die Lücke in unseren Kenntnissen hinzuzeigen, auch wenn man nicht im Stande ist sie auszufüllen. Eine solche Lücke bietet sich sofort dar, wenn wir der Wurzelausziehung bei Heron gedenken. Dass er Methoden dazu besass, ja über diese Methoden schrieb, das wissen wir. Eutokius von Askalon sagt es uns ausdrücklich in seinen Erläuterungen zum dritten Lehrsatze der archimedischen Kreismessung[109]. „Wie man aber die Quadratwurzel, die einer gegebenen Zahl sehr nahe kommt, finden könne, ist von Heron in seinem metrischen Werke gezeigt worden, ebenso von Pappus, Theon und mehreren anderen Exegeten der grossen Zusammenstellung des Klaudius Ptolemäus. Es ist daher nicht nöthig, Untersuchungen über diesen Gegenstand anzustellen, da Freunde der Mathematik bei Jenen darüber nachlesen können." Das Nachlesen, welches Eutokius empfiehlt, setzt nur einen Umstand voraus, dass man das Nachzulesende besitze, und dieses ist nur von einer der genannten Schriften mehr wahr, von den Erläuterungen des Theon von Alexandrien zum Almageste. Die dort gelehrte Methode der Quadratwurzelausziehung kennen wir ganz genau[110], aber ist es gleich die einzige, deren Beschreibung auf uns kam, so können wir doch behaupten, die Methode, deren Heron sich bediente, muss von ihr verschieden gewesen sein. Theon von Alexandrien schrieb für Schüler der Astronomie, Heron von Alexandrien für Schüler der Geodäsie, und darin liegt, wie gelegentlich berührt wurde, im ganzen Alterthume ein gewaltiger Unterschied, kaum geringer als wenn man heute darauf bedacht ist, einen Beobachter an einer Sternwarte oder einen Katasterbeamten auszubilden. Eine der Verschiedenheiten, auch das wurde schon angedeutet, lag in dem Gebrauche der muthmasslich babylonischen Sexagesi-

malbrüche gegenüber von den egyptischen Stammbrüchen. Der Zeit nach konnte Heron mit Sexagesimalbrüchen rechnen, da Hypsikles sie schon kannte, aber seinen Lesern hätte er aufgehört mundgerecht zu sein. Nun bildet es aber im Rechnungsverfahren gradezu einen Gegensatz, ob die einen oder die anderen Brüche angewandt werden. Sexagesimalbrüche, deren Nenner nach Potenzen der Zahl 60 fortschreiten, bilden ein wahres Zahlensystem, sie denken gewissermassen selbst mit, wie jede folgerichtige Bezeichnungsweise. Stammbrüche gehorchen von Fall zu Fall anderen Gesetzen und erfordern doppelte Geschicklichkeit des sie Handhabenden. Aber wäre es nicht denkbar, solche doppelte Geschicklichkeit vorausgesetzt, die Methode Theon's, d. h. dieselbe Methode, deren wir uns heute bei Benutzung von Decimalbrüchen bedienen, anzuwenden und doch mit Stammbrüchen allein dabei umzugehen? Denkbar freilich, vielleicht sogar wahrscheinlich, nur leider nicht wahr! Es giebt, wie uns däucht, ein unfehlbares Mittel, darüber zur Entscheidung zu kommen. Man wähle Beispiele der Quadratwurzelausziehung aus Heron's Schriften, man ziehe die Wurzel selbst aus nach jener auf dem Satze

$$(a + b)^2 = a^2 + (2\,a + b)\,.\,b$$

beruhenden Methode, und man entschliesse sich, die Folgerung gelten zu lassen: noch so viele Fälle, in welchen man so die heronischen Werthe herausrechnet, entscheiden nicht gegenüber von einem Falle, wo Heron's Zahlen nicht herauskommen.

Von diesem Gedankengange aus mögen unter den fast zahllosen, bei Heron vorkommenden Beispielen nur einige auf wenigen Seiten rasch aufeinander folgende angegeben werden: Heron sagt[111]), es sei genau $\sqrt{167\frac{1}{169}} = 12\frac{12}{13}$, sowie $\sqrt{23\frac{1}{25}} = 4\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}$, es sei sehr annähernd $\frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{10}$, $\sqrt{8\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}} = 2\frac{2}{3}\,\frac{1}{4}$, $\sqrt{135} = 11\frac{1}{2}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{21}$, $\sqrt{43\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2}\,\frac{1}{13}\,\frac{1}{26}$, $\sqrt{886}$ weniger $\frac{1}{16} = 29\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{68}$. Davon sind für uns die Näherungswerthe am wichtigsten, weil, wenn kein Zahlensystem zu Grunde liegt, immer bis zu einem gewissen Grade zufällig. Nimmt man nun etwa $\sqrt{43\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}$ vor, so passt Theon's Methode vortrefflich. Die nächste Quadratzahl ist 36, also 6 eine erste Annäherung und $7\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ der Rest. Dividirt man

mit $2 \times 6 = 12$ in den Rest, so wird der Quotient $\frac{1}{2}$, ferner $12\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$, folglich die zweite Annäherung $6\frac{1}{2}$, der Rest $1\frac{1}{2}$. Der neue Divisor dieses Restes wird $2 \times 6\frac{1}{2} = 13$, also der neue Quotient $\frac{1}{13}$, ferner $13\frac{1}{13} \times \frac{1}{13} = 1\frac{1}{169}$, folglich die dritte Annäherung $6\frac{1}{2}\,\frac{1}{13}$, der Rest $\frac{1}{2}$ weniger $\frac{1}{169}$, und theilt man diesen Rest durch $2 \times 6\frac{1}{2}\,\frac{1}{13} = 13$ und etwas, so wird der Quotient beinahe $\frac{1}{26}$ den Näherungswerth $6\frac{1}{2}\,\frac{1}{13}\,\frac{1}{26}$ vollendend. Alle anderen Näherungswerthe aber fallen nach derselben Methode gerechnet anders aus, als Heron sie giebt, und so müssen wir es leider bei der negativen Behauptung belassen: Heron bediente sich nicht derselben Methode der Quadratwurzelausziehung wie sein etwa 450 Jahre jüngerer Landsmann.

Wenden wir uns von dem eigentlichen Zahlenrechnen zu verhältnissmässig etwas höheren Kenntnissen, so wird das Vorkommen arithmetischer Reihen bei Heron[112]) Niemand in Erstaunen setzen, der nur irgend in ein Werk über Geschichte der Mathematik hineingesehen hat. Wichtig aber erscheinen uns einige Stellen, welche eine gewisse Bekanntschaft mit der Lehre von den Gleichungen beweisen, ein wohl verwendbarer Beitrag zur Unterstützung des Satzes, dass Diophant weder die bestimmten, noch die unbestimmten Gleichungen zuerst unter den Griechen behandelte.

Die ersten Aufgaben, auf welche wir in dieser Beziehung hinweisen, gehören zu denen, welche man, wenn es mathematische Gewohnheit wäre, ähnlich dem beschreibenden Naturforscher Arten und Unterarten zu scheiden, zu dem Genus: Brunnenaufgaben zählen würde, weil ihr häufiges Vorkommen ihnen ein Anrecht auf Bildung einer solchen Abtheilung gewährt. Im Allgemeinen handelt es sich dabei immer um irgend einen Behälter, zu dessen Füllung oder Entleerung mehrfache Röhren von bekannter Leistungsfähigkeit dienen, deren vorausgesetztes Zusammenwirken alsdann die Frage nach dessen Ergebniss mit sich führt. Bei Heron sind die Angaben[113]) folgende: eine Cisterne von 12 Raumeinheiten erhalte Wasser durch zwei Röhren, deren eine jede Stunde 1, die andere 4 Raumeinheiten liefert; er folgert daraus, die beiden Röhren gemeinsam werden die Füllung

der Cisterne in $2\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}$ Stunden bewirken. In einer zweiten Aufgabe ist eine Zuflussröhre und eine Abflussröhre angenommen, deren beziehungsweise Leistungen den Zahlen $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{11}$ entsprechen, während der Rauminhalt der Cisterne 100 heisst. Nun sollte als Auflösung die Füllung der Cisterne in $\frac{100}{\frac{1}{7}-\frac{1}{11}} = 1925$ Zeiteinheiten erscheinen, es steht aber nur $427\frac{2}{3}\ \frac{1}{9}$ angegeben, so dass der Sinn der Aufgabe offenbar abhanden gekommen ist, und beide Röhren als Zuflussröhren betrachtet wurden. Können wir diese Stelle als echt heronisch bezeichnen? Die Brunnenaufgaben sind Aufgaben, welche mittelst Gleichungen, aber auch ohne dieselben durch sogenannte Theilungs- oder Gesellschaftsrechnung gelöst werden können. Aufgaben dieser Art, wenn auch nicht Brunnenaufgaben in dem hier definirten Sinne des Wortes, sind so alt wie der mathematische Papyrus, innerlich steht also Nichts im Wege, die Echtheit unserer Stelle anzunehmen. Ob äusserliche Umstände, und dazu rechnen wir insbesondere die griechischen Ausdrücke, welche uns beinahe weniger alterthümlich erscheinen wollen, es zulassen, derselben Annahme sich zuzuneigen, mögen befugtere Sprachkenner entscheiden. Jedenfalls wäre es aber lohnend, die Geschichte einzelner Gruppen von Aufgaben, beispielsweise grade der Brunnenaufgabe, einmal genauer zu verfolgen. Ihr Auftreten in den heronischen Schriften, unter den Aufgaben Alcuin's, bei Alkarcki im XI., bei Bhascara Acharya im XII., bei Leonardo von Pisa im XIII. Jahrhunderte, von wo an sie Gemeingut fast aller Rechenbücher ist, ihr der Zeit nach noch nicht fest bestimmtes Erscheinen unter den griechischen Epigrammen algebraischen Inhaltes, welche muthmasslich alexandrinischen Ursprunges sein dürften, das sind, so weit wir es übersehen können, etwa die Hauptspuren, von deren Verfolgung man ausgehen müsste.

Mit weit grösserer Bestimmtheit wagen wir es, für die Echtheit einer zweiten, viel wichtigeren Stelle einzutreten, welche die Bekanntschaft Heron's mit der Auflösung quadratischer Gleichungen darthut. Nicht bloss dass sie in der Sammlung von verhältnissmässig grösster Zuverlässigkeit und zwar in der besten Handschrift dieser Samm-

lung enthalten ist, sie steht auch mitten unter anderen Aufgaben vollkommen heronischen Gepräges, sie ist endlich so gefasst, dass erst eine kleine Ueberlegung die Ueberzeugung beibringt, dass die Stelle überhaupt richtig ist und auf einer quadratischen Gleichung beruht, ein Grund mehr, wie uns scheint, spätere Einschiebung auszuschliessen. Es handelt sich um Berechnung des Kreisdurchmessers d aus der Summe S der in eine Zahl vereinigten Kreisfläche K, Peripherie P und Durchmesser d selbst. Die Vorschrift lautet als Formel geschrieben

$$d = \frac{\sqrt{154\,S + 841} - 29}{11}.$$

Gehen wir nun der Aufgabe mit modernen Hülfsmitteln zu Leibe. Wir wissen

$$K = \frac{\pi}{4}\,d^2,\ P = \pi d,\ d = d \text{ also } S = \frac{\pi}{4}\,d^2 + (\pi + 1)\,d$$

und daraus, unter Berücksichtigung dass der Durchmesser als absolute Länge nicht negativ ausfallen darf, eindeutig

$$d = \frac{\sqrt{\pi S + (\pi + 1)^2} - (\pi + 1)}{\frac{\pi}{2}}.$$

Setzen wir nun $\pi = \frac{22}{7}$ also $\pi + 1 = \frac{29}{7}$, $(\pi + 1)^2 = \frac{841}{49}$, so geht der eben gefundene Werth genau in den bei Heron angegebenen über, für welchen uns somit ebenso die Berechtigung feststeht, als auch die einzig auf dem Wege der quadratischen Gleichung denkbare Herleitung.

In der dritten Stelle[115]), deren Besprechung wir dem Schlusse dieses Abschnittes aufgespart haben, handelt es sich nicht um Gleichungen, sondern um die a u s e i n e r n e g a t i v e n Z a h l z u z i e h e n d e n Q u a d r a t w u r z e l. Der Körperinhalt J einer abgestumpften Pyramide von quadratischen Grundflächen wird gesucht. Die theils unmittelbar, theils mittelbar gegebenen Stücke sind: a_1 die Seite des unteren grösseren, a_2 die Seite des oberen kleineren Quadrates, k die Kante des Pyramidenstumpfes, H dessen senkrechte Höhe, h die Höhe einer der parallelotrapezischen Seitenflächen. Der Reihe nach ist

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2},\ H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2}$$

oder auch durch Einführung des Werthes von h sogleich

$$H = \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2},$$

endlich $$J = H\left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2\right].$$

Das ist die Formel, welche in einem ersten Beispiele, in welchem $a_1 = 10$, $a_2 = 2$, $k = 9$ angenommen ist, mit gutem Erfolge berechnet wird. $H = \sqrt{9^2 - \frac{1}{2}(10 - 2)^2} = 7$ und daraus $J = 7\left[\left(\frac{10+2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{10-2}{2}\right)^2\right] = 289\frac{1}{3}$.

Die Benutzbarkeit der Formel setzt aber voraus, dass

$$k^2 > \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2,$$

wie aus dem zweiten Werthe von H hervorgeht, wovon man sich aber auch geometrisch durch Einzeichnung des kleinen Quadrates von der Seite a_2 in die Mitte des grossen Quadrates von der Seite a_1 überzeugen kann, indem ein Pyramidenstumpf nur dann möglich ist, wenn die Entfernung zweier nächstgelegener Endpunkte dieser Quadrate kleiner als die Kante k des Stumpfes ist. Betrachtungen von der hier angestellten Art waren griechischen Geometern durchaus nicht fremdartig; sie bildeten einen besonderen Theil ihrer Forschungen unter dem Namen Diorismos, oder in latinisirter Benennung Determination als Bestimmung der Möglichkeit einer Aufgabe, und Leon, ein der Akademie angehöriger Mathematiker etwa aus der Mitte des IV. S. vor Chr., wird als erster Bearbeiter dieses neuen Gebietes bezeichnet. Bei der hier auseinandergesetzten Aufgabe muss eine Determination nicht stattgefunden haben, sonst könnten nicht in einem zweiten Beispiele $a_1 = 28$, $a_2 = 4$, $k = 15$ angesetzt sein, welche der geforderten Ungleichung widersprechen. Auffallend genug, auch wenn wir keinen Zusammenhang irgend einer Art darin suchen, dass grade von der Pyramide auch ein altegyptisches Beispiel von Zahlenannahmen existirt, welche, wie wir S. 34 erwähnten, einen Widerspruch in sich schliessen. Hat nun der Mangel an Determination in dem zweiten heronischen Beispiele Verkehrtes verlangt, so ist um so interessanter, wie der Verfasser sich hilft. Diesmal rechnet er nämlich nicht unmittel-

bar H aus a_1, a_2, k aus, sondern mit dem Umwege über $h = \sqrt{15^2 - \left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = 9$, worauf er

$$H = \sqrt{\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 - h^2} = \sqrt{63} = 8 \text{ weniger } \tfrac{1}{16}$$

setzt. Mit andern Worten: die von Rechtswegen negative Differenz 81 — 144 unter dem Quadratwurzelzeichen wird als absolute Differenz der beiden Zahlen 144 und 81 aufgefasst. Mag nun diese Stelle heronisch sein oder nicht — wir sehen freilich nicht ab, woraus man ihre Alterthümlichkeit zu bestreiten das Recht hernähme — jedenfalls ist sie das einzige Beispiel in griechischer Sprache, welches bis jetzt aufgefunden ist, in welcher das später sogenannte Imaginäre, wenn auch in ganz falscher Behandlung, unter der Voraussetzung $\sqrt{-1} = 1$ vorkommt.

Endlich finden wir noch eine letzte Stelle zu erwähnen[116]), in welcher wir trotz des lückenhaften Textes zwei Aufgaben der unbestimmten Analytik nicht verkennen können. Wir ergänzen die Aufgaben so, dass sie den Zahlenangaben der Auflösungen genügen, und dürfen sie alsdann zerlegen wie folgt: das eine Mal sollen zwei Rechtecke gefunden werden, deren Umfänge wie deren Flächeninhalte im Verhältnisse wie 1 : 3 stehen; das andere Mal zwei Rechtecke von gleichen Umfängen, deren Flächen im Verhältnisse von 1 : 4 stehen. Die Auflösung der ersten Aufgabe bilden die Rechtecke aus den Seiten 54, 53 und 318, 3, die der zweiten die Rechtecke aus den Seiten 3, 60 und 15, 48. Diese Aufgaben würden in ihrer geometrischen Einkleidung um so denkwürdiger für die alexandrinische Wissenschaft des ersten vorchristlichen Jahrhunderts sein, als keine der späteren diophantischen Aufgaben aus demselben analytischen Gebiete eine solche Einkleidung besitzt. Ob man aber die Aufgaben mit Bestimmtheit für heronisch erklären kann? Wir stellen die Frage als eine noch zu beantwordende und lassen uns daran genügen, darauf aufmerksam zu machen, dass dieselben Aufgaben theilweise mit demselben Wortlaut, aber vermehrt um eine allgemeine Lösung der zweiten Aufgabe, sich als Schluss des Rechenbuches des Maximus Planudes wiederfinden. Wir bringen ferner in Er-

innerung, dass dieser Mönch in der Mitte des XIV. S. eine wesentlich zusammentragende Thätigkeit entwickelte. Seine Rechenmethoden hat er nach ausdrücklicher Erklärung den Indern entnommen. Stammen die Schlussaufgaben aus derselben Quelle? Es ist nicht unmöglich. Andrerseits ist zu erwägen, dass Maximus Planudes auch Griechisches sammelte, dass er an der Zusammenstellung jener Blumenlese griechischer Epigramme betheiligt war, unter welchen auch die oben bei der Brunnenaufgabe erwähnten algebraischen Epigramme enthalten sind, dass endlich Maximus Planudes sich für unbestimmte Analytik so sehr interessirte, dass er Erläuterungen zu den beiden ersten Büchern des Diophant verfasste.

Und somit beschliessen wir den ersten Abschnitt dieser Untersuchungen. Wir hoffen, dass der Leser aus demselben wenigstens die allgemeinen Züge des bedeutenden Mannes herauszuerkennen im Stande sein wird, den wir darzustellen versuchten. Ist das Bild nicht mit photographischer Treue und deutlich bis auf die feinsten Einzelnheiten ausgeführt, so wollen wir die Verantwortlichkeit dafür nicht ganz von uns weisen. Manche Fragen, welche wir aufzuwerfen uns begnügten, mögen durch einen Schriftsteller, der sie zum Hauptzwecke wählt, beantwortet werden können. Uns dagegen ist dieser erste Abschnitt theilweise doch nur Mittel zum Zwecke. Wir schrieben ihn, weil wir ihn im Folgenden nicht entbehren können. Wir durften also Lückenhafteres bieten. Nur den Vorwurf hoffen wir nicht verdient zu haben, dass wir Lücken verborgen hätten, oder als Lücken offen liessen, wofür die Ausfüllung uns leicht gewesen wäre.

Abschnitt II.

Römische Feldmessung.

Wenn auch der niedrige Zustand der mathematischen Kenntnisse der Römer zumeist unter Berufung auf eine Stelle[117]) aus Cicero's Tusculaneen in den meisten Schriften, welche mit Geschichte der Mathematik sich beschäftigen, gekennzeichnet zu werden pflegt; wenn auch der Verfasser

dieses Bändchens an einem Orte, wo es ihm insbesondere um Untersuchungen über die Entwicklung der Rechenkunst zu thun war[118]), einer Anzahl römischer Schriftsteller aus der Zunft der Feldmesser sogar den Anspruch auf den Namen Mathematiker bestreiten zu müssen glaubte, so ist doch damit nicht ausgeschlossen das kulturgeschichtliche Interesse, welches an die Schriften eben derselben Männer sich knüpfen kann, sobald ein anderer leitender Gedanke in seinen historischen Wanderungen und Wandelungen verfolgt werden soll. Unsere gegenwärtige Untersuchung hat uns Veranlassung gegeben, uns wiederholt mit römischer Feldmessung und mit denen, welche sie gewerbsmässig übten, zu beschäftigen. Wir haben reiches Material zu dieser Untersuchung anwenden können und müssen, welches an den verschiedensten Orten, in den verschiedensten Werken zerstreut lag. Die Zusammenstellung desselben nach einem Gesichtspunkte geordnet bieten wir unseren Lesern im Folgenden.

Die Feldmessung, so sagen alle alten Berichterstatter, sei in Egypten heimisch gewesen. Sie habe dort die theoretische Geometrie entstehen lassen, selbst hervorgerufen durch das Bedürfniss, durch die Nothwendigkeit wiederholter Grenzbestimmungen, wenn das Austreten des Nils, heftiger als gewöhnlich sich vollziehend, die alten Feldmarken vernichtet hatte. Auch die römische Geschichte können wir, selbst an der Hand der Sage, nicht so weit aufwärts verfolgen, dass wir nicht von Feldmessung hörten. Romulus gründet die nach ihm benannte Stadt nach den Regeln der Feldmesskunst[119]). Die Vertheilung von Grundeigenthum an Patricier und Plebejer, die ganze Agrargesetzgebung lassen sich ohne amtliche Feldmessung nicht verstehen. Feldmesser theilen seit der Zeit der Republik den Grundbesitz überwundener Feinde, damit er meistens neu überwiesen den ursprünglichen Herren zurückgegeben werde, mittelst dessen aber auch Colonien gebildet, Veteranen belohnt werden[120]). Zu ähnlichen Zwecken eben so wohl, als zu militärisch-technischen Abmessungen begleitet in der Kaiserzeit ein Oberfeldmesser Balbus den Trajan auf seinem dacischen Feldzuge[121]). Stets ist bei irgend einem mit Städtegründung oder Colonisation zusammenhängenden

Ereignisse von amtlichen Persönlichkeiten in feldmesserischer Thätigkeit die Rede[122]). Hier war es nicht wie in Egypten ein naturgesetzlich sich wiederholendes Bedürfniss, welches jener Einrichtung zu Grunde lag. Dafür aber thun wir dem geschichtlichen Entwicklungsgange wohl keinen Zwang an, wenn wir den Zusammenhang zwischen römischer Denkart und amtlicher Feldmessung in der Rechtsanschauung der Römer finden, welche fast als Bedürfniss zu bezeichnen, jedenfalls ausgesprochener vorhanden als bei irgend einem anderen Volke, feststehende Normen verlangte, selbst wo sie ein sittliches Unrecht begehrte, wie in jener Satzung des römischen Kriegsrechts, dass Feindesland dem Sieger zu beliebiger Austheilung anheimfalle.

Ist das römische Gesetzlichkeitsgefühl selbst ein Erbtheil älterer Vorahnen gewesen? Wir wissen es nicht, aber gehen wir in Aufzählung der uns hier einzig kümmernden Erinnerungen noch weiter zurück auf die Gewohnheiten solcher Völker, welche römischer Herrschaft und römischem Gesetze nicht unterworfen in Italien ihre Heimath hatten, so bezeugen die Ruinen in Toscana wie anderwärts die Wahrheit des Satzes, den im I. S. v. Chr. Varro aussprach[123]), dass die Feldmesskunst von den Etruskern herstamme. Das etruskische Tempelfeld, wie später die römische Colonie halten an derselben Eintheilungsregel, an demselben Orientirungsgrundsatze[124]) fest, einem Grundsatze, der, wie wir beiläufig bemerken möchten, allgemein menschlicher Natur zu sein scheint, da aller Orten die ältesten Heiligthümer, Tempel und Gräber, die Pyramiden von Gizeh wie der Tempel Salomonis wie die Gotteshäuser der Inder nach den Himmelsgegenden aufgebaut sind, theilweise heute noch vorhandene steinerne Beweise für die genaue Kenntniss der Mittagslinie in weit entrückten Zeiten. Das Tempelfeld der Etrusker[125]) führt seinen Namen muthmasslich von einem mit τέμνειν verwandten Worte als der geschnittene Raum, d. h. das durch einen Schnitt Entstandene, ähnlich wie *duplum*, *triplum* das durch 2, durch 3 Entstandene bezeichnet. Geschnitten wurde nämlich der Horizont durch zwei senkrecht zu einander stehende Linien in vier Theile, und diese Linien bilden die Richtungen für die Seiten des

rechteckigen Tempelfeldes. Die Absteckung derselben erfolgt durch die Auguren als halbpriesterliche Beamte. Sie macht einen Haupttheil der sogenannten Haruspicin aus. Wir können uns mit Zuhülfenahme eines sehr modernen Begriffes jene beiden Richtungen etwa als zu einander senkrechte Coordinatenaxen denken, deren erstverzeichnete Abscissenaxe der Decumanus, die auf dieselbe senkrechte Ordinatenaxe der Cardo genannt wird.

Was Decumanus bedeute, ist nicht bekannt. Alte Etymologen wollen zwar Decumanus aus einem Duocimanus entstanden wissen[126], abgeleitet von einem alten *duocere*, zweitheilen, ähnlich wie *vertumnus* aus *vertere*, *portumnus* aus *porto*, so dass Decimanus jede Zweitheilung des Raumes bedeuten könne. Neuere vergleichende Sprachwissenschaft schüttelt aber gegen diese regelwidrige Verketzerung des ursprünglichen Wortes ungläubig den Kopf und begnügt sich damit, überhaupt eine Verketzerung hier anzunehmen, welche nachträglich zu der ungeschickten Etymologie verführt habe, wovon Beispiele in jeder Sprache, auch in der deutschen, so häufig sind. Wir erinnern nur an das in Armbrust verderbte *arcubalista*, an das aus *pellicium* entstandene Felleisen, an Kümmelblättchen mit hart gewordener Aussprache aus Gimmelblättchen, d. h. Dreiblatt u. s. w., lauter Versuchungen für Witz mit Unwissenheit gepaart möglich geistreich den Sinn aus dem Wortlaut zu erklären. Wissen wir also so viel oder weniger als Nichts von Decumanus, so ist der Name der dazu senkrechten Richtung einem Zweifel nicht unterworfen. Cardo ist die Angel, um welche das Weltall sich drehet, die Weltaxe[127]) oder die südnördliche Mittagslinie, wodurch für den Decumanus die ostwestliche Richtung sich ergiebt, die aber immer als die erstbestimmte zu denken ist, zunächst wohl aus praktischen Gründen, wozu vielleicht nachträglich noch als theoretischer Grund hinzugesucht wurde, es könne von übler Vorbedeutung sein, wenn mit der Richtung gegen Mitternacht angefangen würde[128]). Der Augur steht entweder auf der von ihm als Decumanus gezogenen Linie und sieht nach Süden, welches ihm das Anticum heisst, wie die Nordgegend in seinem Rücken Posticum genannt wird, oder

aber, und dieses scheint bei der eigentlichen Augurenthätigkeit der Fall gewesen zu sein, er steht in der Decussis, d. h. in dem Winkel, den Decumanus und Cardo mit einander bilden. Wirklich sind die mittelitalienischen Tempel nicht nach Süden, sondern in der Diagonale des gromatischen Quadrates aus gleichen dem Decumanus und Cardo parallelen Seiten gerichtet, meistens nach Südosten, manchmal auch nach Südwesten. Solche toskanische Tempel sind der Regel nach mehr tief als breit; die beiden Ausmessungen verhalten sich wie 6 zu 5 und die grössere derselben heisst Länge, *longitudo*, die kleinere Breite *latitudo*[129]. Man wird unwillkürlich an die Analoga dieser Wörter bei Heron und in Egypten erinnert[89]), eine erste Spur von Abhängigkeit, welcher weitere in grösster Zahl folgen sollen.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun Zweierlei mit Gewissheit. Der Augur muss im Stande gewesen sein, die Mittagslinie zu finden. Er muss auch im Stande gewesen sein, zu einer auf dem Felde gezogenen Linie in einem gegebenen Punkte derselben die Senkrechte zu ziehen. Beschäftigen wir uns mit dem Vollzuge dieser beiden Obliegenheiten.

Wie hat der Augur die Mittagslinie gefunden? Diese Frage ist wieder eine von jenen vielen, welche wir nur zu stellen im Stande sind. Die Antwort müssen wir schuldig bleiben. Nicht als ob uns römische Angaben über die Auffindung der Mittagslinie fehlten. Vitruvius, ein Architekt aus der Zeit des Augustus um 15 v. Chr., Hyginus, ein Feldmesser aus der Zeit Trajans um 100 n. Chr., der Letztere ein halbes Jahrhundert vor Klaudius Ptolemäus, machen uns mit zwei Methoden zur Erreichung dieses Zweckes bekannt[130]), welche beide verdienen hier auseinandergesetzt zu werden. Das eine Mal wird (Figur 12) auf einer geebneten Grundlage ein senkrechter Stift C als Schattennehmer (*sciotherum*) befestigt und zum Mittelpunkte eines Kreises gemacht, dessen Halbmesser kleiner als die grösste Schattenlänge des Stiftes gewählt werden muss. Sowohl des Morgens als des Nachmittags wird der Schatten einmal so lang werden, dass sein Endpunkt genau in diesen Kreisumfang eintrifft, und die beiden Punkte A, B, in welchen

Solches der Fall ist, hat man zu beobachten und anzumerken. Dadurch ergiebt sich die Linie *AB* von selbst, welche Nichts anderes ist als der Decumanus, während der Cardo senkrecht von *C* aus auf die Mitte von *AB* zu zeichnen ist. Die zweite Methode benutzt nicht zwei gleich lange Schattenlängen vor und nach der Mittagsstunde, sondern drei ungleich lange Schattenlängen, welche in kurz auf einander folgenden Zeitpunkten, etwa sämmtlich vormittags, auf der Grundebene unseres Skiotherums verzeichnet worden sind. Ist *B* der Fusspunkt des Stiftes, sind *BE*, *BC*, *BD* die drei aufgezeichneten Schatten, so wird eine Hülfsfigur so gezeichnet (Figur 13), dass ein rechter Winkel seine Spitze in einem gleichfalls *B* genannten Punkte haben möge. Sein einer Schenkel *BA* ist genau so lang wie der mehrgenannte Stift, auf dem anderen Schenkel sind die Längen *BE*, *BC*, *BD* gleich den mit denselben Buchstaben versehenen Schattenlängen abgeschnitten. Nun werden von *A* aus die drei Geraden *AE*, *AC*, *AD* gezogen und mit der kleinsten derselben *AE* ein Kreisbogen beschrieben, welcher die *AC* in *I*, die *AD* in *F* schneidet, worauf *IK* und *FG* beide parallel der *BECD* bis zum Durchschnitte mit der *AB* gezogen werden. Die so gefundenen Längen werden in der unmittelbar am Skiotherum entworfenen Figur (Figur 14) von *B* aus auf *BC* und auf *BD* abgemessen, $BM = IK$, $BL = FG$, und *LM* sowohl als *CD* gradlinig verbunden und bis zum Durchschnitte in *H* verlängert. Die Verbindungslinie *HE* ist alsdann der Decumanus; von *B* aus senkrecht auf dieselbe erscheint der Cardo.

Bereits im Jahre 1813 hat ein gelehrter deutscher Mathematiker, Mollweide, diese Methode zum Gegenstande einer Abhandlung gemacht[131]), in welcher der Text des Hyginus erstmalig in gereinigtem Wortlaute erscheint, und in welcher neben Anderem auch ein stereometrischer Beweis der Methode vorgetragen ist, den wir um so lieber in Mollweide's eigenen Ausdrücken wiederholen, als eine klarere Darstellung nicht wohl möglich ist[132]). „Man denke sich die rechtwinkligen Dreiecke *ABD*, *ABC*, *ABE* aus Figur 13 senkrecht auf die Ebene der Geraden *BD*, *BC*, *BE* (Figur 14) aufgerichtet, so fällt *A* in die Spitze des Zeigers; *ABD*, *ABC*, *ABE* sind die Vertikalflächen, in denen sich die Sonne

befand, als der Stift *AB* die Schatten *BD*, *BC*, *BE* warf, und *DA*, *CA*, *EA* gehen nach dem Mittelpunkte der Sonne, liegen also in der Oberfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze *A*, Grundfläche aber der Tagekreis der Sonne ist. Da nach der Construction $AF = AE = AI$, so sind die Punkte *F*, *I*, *E* im Umfange eines Kreises, der dem Tagekreise der Sonne, folglich auch dem Aequator parallel ist, und *FI* ist eine Sehne dieses Kreises. Weil ferner *FG* der *BL* gleich und parallel ist, so ist auch, wenn man *FL* verbindet, solche der *BG* gleich und parallel. Ebenso ist *IM* der *BK* gleich und parallel. Da also *FL* und *IM* der *AB*, folglich auch einander parallel sind, so liegen sie in einer Ebene, in welcher auch *FI* so wie *LM* ist. *FI* ist aber auch in der Ebene *ADC*, und *LM* in der horizontalen Ebene *BCD*, folglich ist *FI* der Durchschnitt der Ebene *FIML* mit der Ebene *ADC*, und *LM* der Durchschnitt derselben Ebene mit der horizontalen *BCD*. Nun schneidet die Ebene *ADC* die horizontale Ebene in der *DC*, welche verlängert der gleichfalls verlängerten *LM* in *H* begegnet, folglich ist *H* in der Ebene *ADC* und auch in der Ebene *FIML*; folglich ein Punkt des gemeinschaftlichen Durchschnittes beider Ebenen, d. h. der verlängerten *FI*. Diese aber liegt ganz in der Ebene des Kreises durch *F*, *I*, *E*, also ist *H* in dieser Ebene, aber auch in der horizontalen Ebene *BDC*, folglich ein Punkt des gemeinschaftlichen Durchschnittes beider Ebenen. Nun ist auch *E* ein solcher, folglich die verbundenen *EH* der Durchschnitt einer der Aequatorsebene parallelen Ebene mit der horizontalen Ebene, mithin der Ostwestlinie parallel.“

Von wem rührt nun diese durch Hyginus gelehrte Methode her? Auch diese Frage hat Mollweide sich bereits gestellt[133]) und dahin beantwortet, von Hyginus selbst rühre sie schwerlich her, da die Römer in der eigentlich wissenschaftlichen Geometrie, ohne welche man nicht auf jene Methode kommen kann, sehr fremd waren. Er fährt fort: „Höchst wahrscheinlich ist diese Methode von einem griechischen Schriftsteller entlehnt, aber, so weit ich nach meiner Kenntniss derselben urtheilen darf, aus keinem der noch vorhandenen und bekannten, sondern aus einem verloren gegangenen und un-

bekannten." Diese Ansicht, für welche noch Gründe an späterer Stelle angeführt werden sollen, und der wir uns durchaus anschliessen, gestattet zunächst die Folgerung, dass die zweite Hyginische Methode, wenn sie nicht römisch ist, noch viel weniger als die Methode der alten Etrusker gelten kann. Indessen dürfte auch der ersten Methode des Hyginus, derselben, welche auch Vitruvius lehrt, ein so altitalischer Ursprung kaum zu gewähren sein. Freilich beruht sie auf viel einfacheren geometrischen Obersätzen und verlangt von dem Erfinder keine tiefgehende theoretischen Kenntnisse. Freilich theilt sie mit der zweiten Methode den Vortheil, unmittelbar den Decumanus zu liefern, der also, wie oben gesagt wurde, zunächst aus praktischen Gründen, die erstbestimmte Coordinatenaxe sein mochte. Aber auch die erste Methode beruht auf der Benutzung eines Schattennehmers, eines Gnomon, wie der altgriechische Name lautet, und da dürfte auf die Geschichte dieses Apparates einen Blick zu werfen nicht unnöthig sein.

„Den Polos, den Gnomon und die Zwölftheilung des Tages lernten die Hellenen von den Babyloniern kennen." So erzählt uns Herodot[134]). Was nun unter Polos, was unter Gnomon zu verstehen sei, das ist so ganz sicher nicht[135]). Jedenfalls waren es Vorrichtungen, welche durch ihren von der Sonne erzeugten Schatten die Zeiteintheilung des Tages frühe regelten. Insbesondere der Gnomon wird von einem Lexikographen des X. S., von Suidas[136]), als durch Anaximander bei den Griechen eingeführt bezeichnet, wornach also die Griechen um 550 v. Chr. im Besitz desselben gewesen sein würden. Noch höher ist das Alter, bis zu welchem auf semitischem Boden die Kenntniss einer Art von Sonnenuhr nachweislich ist. In nicht misszuverstehender Weise bezeugen dies die Worte des Jesaia: „Ich will den Schatten am Sonnenzeiger Ahas zehen Linien zurückziehen, über welche er gelaufen ist, dass die Sonne zehen Linien zurücklaufen soll am Zeiger, über welche sie gelaufen ist." Und damit stimmen überein die Worte eines historischen Buches der heiligen Schrift[137]): „Der Schatten ging hinter sich zurück zehen Stufen am Zeiger Ahas, die er war niederwärts gegangen." Hier ist also in einer Zeit, welche jeden-

falls vor 700 zu setzen sein dürfte, eine wie immer gestaltete wirkliche Sonnenuhr beschrieben mit der Eintheilung in Grade, ein Ausdruck, dessen wir uns um so sicherer bedienen dürfen, als *mâlh*, der hebräische Name der „Linien“ oder „Stufen“ in seiner Abstammung von *âlh* (sich nach aufwärts bewegen), wenn auch nicht dem Laute, doch dem Sinne nach vollständig mit dem lateinischen *gradus*, dem englischen *degree*, dem französischen *degré*, dem deutschen Grad übereinstimmt, wozu auch noch das arabische Wort gleicher Bedeutung und zufällig ähnlichen Klanges *daraga* gezählt werden mag[138]).

So ist das hohe Alter des Gnomon uns festgestellt. Ganz anders aber verhält es sich mit dessen Bekanntwerden bei den Römern. Wir wissen aus unmittelbaren Berichten, wir schliessen aus mittelbaren Angaben, dass die Einführung der Sonnenuhr in Rom verhältnissmässig spät erfolgte. Plinius hat zwei Berichte darüber aufbewahrt[139]). Der Eine rührt von einem sonst ganz unbekannten Fabius Vestalis her und lässt Lucius Papirius Cursor 293 die erste Sonnenuhr am Quirinustempel stiften. Dieser Mittheilung schenkt aber Plinius selbst keinen rechten Glauben gegenüber der Anderen, für welche er sich auf Marcus Varro stützt, Valerius Messala habe 263 die erste Sonnenuhr aus Catina in Sicilien nach Rom gebracht. Die Glaubwürdigkeit dieser letzteren Thatsache erhöhet sich noch durch den Zusatz, für Rom sei die für Catina entworfene Sonnenuhr unrichtig gewesen und doch habe man 99 Jahre lang sich nach ihr gerichtet, bis der Censor Quintus Marcius Philippus eine neue richtige Sonnenuhr neben der alten aufgestellt habe. Nun könnte man einwenden, Varro's Erzählung beweise ein höheres Alter der Sonnenuhr in Sicilien, möglicherweise also auch in Unteritalien und Etrurien, ohne dass grade in Rom selbst eine solche vorhanden gewesen wäre. Neben der Unwahrscheinlichkeit dieser Annahme berufen wir uns auf ein mittelbares Zeugniss, welches wir dem Vitruvius schulden[140]). Erfinder der Sonnenuhr nennt dieser historischen Zwischenbemerkungen und überhaupt dem Citiren sehr geneigte Schriftsteller Berosus. Berosus war aber Zeitgenosse Alexander des Grossen, und so beweist uns

die Angabe des Vitruvius, dass man zu seiner Zeit nicht anders wusste, als dass vor 300 Sonnenuhren weder in Rom noch sonst irgendwo vorhanden waren. Derselbe Vitruvius, das muss man im Auge behalten, theilt jene Methode zur Herstellung der Mittagslinie mit, welche wir als die erste des Hyginus benannten. Wie will man da die Wahrscheinlichkeit zurückweisen, auch dieses Verfahren reiche keinenfalls jenseits 300 zurück, könne also den etruskischen Auguren bei Lösung ihrer Aufgabe nicht gedient haben?

War erst auf irgend eine Weise die Mittagslinie oder, wie wir glauben, unmittelbar der Decumanus bekannt, dann hatte der Augur die weitere Obliegenheit, eine Senkrechte auf dem Felde abzustecken, als Cardo. Sein Verfahren bei dieser Aufgabe dürfte in der Benutzung eines, unserer Ansicht nach uralten italischen Instrumentes bestanden haben, welches zu verschiedenen Zeiten verschiedentlich benannt, bald *cruma* oder *gruma* oder *groma*, bald *machinula*, bald *stella* hiess, und welches der Hauptsache nach aus vier Endpunkten zweier einander senkrecht durchschneidenden Geraden und dem Durchschnittspunkte dieser Geraden bestand, welche auf irgend eine Weise zur Wahrnehmung gebracht wurden, sei es dass nur die Eckpunkte eines quadratischen Plättchen und der durch einen Stift bezeichnete Durchschnittspunkt der Diagonalen zur Betrachtung kamen, sei es, dass jene Endpunkte in der Mitte der Seiten eines solchen massiven Quadrates oder auch am Umfange einer kreisrunden Scheibe durch Stiftchen und daran hängende Bleisenkel bezeichnet wurden, sei es dass die Geraden selbst durch Metallstäbe versinnlicht wurden und eine dem modernen Winkelkreuze verwandte Gestalt annahmen. Man nahm bis vor wenigen Jahren an, ein Originalwerkzeug der ersten Art, muthmasslich aus der Sammlung Spinelli in Neapel stammend, habe sich bis auf den heutigen Tag erhalten, wo es im Antiquarium zu Berlin aufbewahrt werde, doch lässt die neueste Beschreibung dieses etwa einen Fuss langen Stieles mit viereckigem Plättchen jene Hoffnung wieder schwinden[141]), so dass man mehr als je auf Vermuthungen angewiesen ist.

Gegen den von uns angenommenen altitalischen Ursprung

des Groma ist freilich eine Einsprache von bedeutsamstem Gewichte im Voraus erhoben worden, von Niemand geringerem als Karl Ottfried Müller. Da die Stelle seines überreichen Werkes über die Etrusker, welche wir hier im Auge haben[142]), dutzendfach als einzige Begründung oft viel weitergehender Behauptungen angeführt worden ist, ohne den Lesern den Wortlaut zur Vergleichung zu bieten, so halten wir es nicht für überflüssig, den entgegengesetzten Weg hier einzuschlagen. Müller sagt: „Auch die Wissenschaft der Landmessung war in Etrurien ursprünglich ein Theil der Haruspicin, und wird wohl hier am Besten an die Auseinandersetzung der mannigfachen Anwendungen des Templum angeknüpft. Es war ein grossartiger Gedanke der alten Tusker, dass sie das Land, welches ihnen nach ihrem Glauben Jupiter zur Cultur angewiesen, nun auch auf dieselbe Weise eintheilten, wie die Plätze, auf denen sie seine Stimme zu vernehmen glaubten, und dass sie zugleich jeden Acker durch seine Gränzen in Beziehung auf das Universum setzten, indem sie diesen dieselbe Richtung gaben, in der das Himmelsgewölbe sich über unserem Haupte dreht. Jupiter selbst hatte, unmittelbar oder durch den Sohn seines Genius Tages, die Begränzung oder Limitation der Aecker angeordnet. Es war Frevel gegen die göttliche Ordnung, sie zu versäumen oder zu stören. Es war darum auch hier das Erste, den Cardo und den Decumanus zu ziehen. Wie die Etrusker ursprünglich dabei verfuhren, ist unbekannt, da *groma* oder *gruma* ganz deutlich von dem griechischen *γνῶμα* corrumpirt ist und das griechische Instrument in Rom und Etrurien erst einige Zeit nachher bekannt geworden sein kann, als es die Griechen von den Babyloniern empfangen hatten, welches im Jahrhundert des Pherekydes und Anaximenes geschah."

Wir möchten, nachdem wir unsere Leser veranlasst haben sich so genauer, als es wohl sonst geschehen mag, mit Müllers Ansichten bekannt zu machen, fast unseren eigenen Ausspruch zurücknehmen, dass jener berühmte Gelehrte den altitalischen Ursprung des Groma verwarf. Das einzige unterscheidende Moment zwischen Müller's Meinung und der unsrigen bezieht sich auf den Namen jenes Appa-

rates. Weil Groma an Gnoma erinnert, weil Festus, ein Lexikograph des II. S., auf die Aehnlichkeit dieser Wörter aufmerksam macht[113]), desshalb soll das Groma gar nicht das alterthümliche Instrument gewesen sein, welches die Etrusker allerdings besassen, allerdings benannt haben müssen, aber wie? ist unbekannt. Nun scheint uns die Stelle des Festus, möge sie selbst dem lexikalischen Werke des M. Verrius Flaccus aus augusteischer Zeit entnommen sein, welches ihm vielfach als Quelle gedient haben soll, nur so viel zu beweisen, dass der Verfasser der Stelle mehr Grammatiker als Gromatiker war. Es ist ihm begegnet, was Allen nach ihm begegnen musste, die auf ihn sich stützten, er hat zwei durchaus verschiedene Apparate mit einander verwechselt. Nein, Groma kann nicht von Gnomon herstammen, weil jedes der beiden Worte ein ganz anderes Ding bedeutet, darin freilich übereinstimmend, dass beide mit Stiftchen versehen waren, auch darin, dass beide bei Absteckung des Decumanus und des Cardo in Anwendung kamen, aber die Anwendung erfolgte zu wesentlich unterschiedenen Zwecken und in auf einander folgenden Zeitpunkten.

Wir müssen vielleicht unsere Meinung noch etwas breiter ausführen, um zu keinem Missverständnisse derselben Anlass zu geben. Im Griechischen bedeutet freilich Gnomon zweierlei. Es bedeutet eine Sonnenuhr und einen rechten Winkel. Würde also etwa nur die Sonnenuhr oder nur der rechte Winkel in einem Werke zur Rede kommen, so könnte, ohne Schwierigkeiten zu erregen, das Wort Gnomon von dem einen Werke zu dem anderen seinen Sinn wechseln. Hält man es aber für wahrscheinlich, ein Grieche würde für beide Bedeutungen in demselben Buche kurz hinter einander Gnomon gebraucht haben? Wir können das nicht glauben, und dasselbe Zutrauen haben wir zu den Römern. Sie übernahmen von den Griechen den Gnomon als Sonnenuhr, den Namen und die Sache. Es ist uns undenkbar, dass sie denselben Namen übernommen haben sollen für ein Ding, welches sie besassen, für welches verhältnissmässig früh ein guter lateinischer Name, *stella*, wie wir gleich sehen werden, vorhanden war, und welches endlich griechisch nicht einmal

Gnomon genannt sein würde, denn ein Kreuz ist doch nicht dasselbe wie ein massiver Winkelhaken. Zudem ist Groma auch in Bedeutungen vorhanden, von denen Festus Nichts sagt. Hyginus giebt z. B. an[144]), der Marktplatz in Mitten der Hauptstrasse habe Groma geheissen, weil dorthin die Menge sich sammelte, *congruit*; eine Wortspielerei, an welche Hyginus selbst nicht glaubt, denn er fügt hinzu, der Platz werde wohl so heissen, weil dort bei der Grenzabsteckung das Groma auf seinem Fussgestelle, *ferramentum*, aufgepflanzt werde, um die Thore an den Enden der Strassen in die Sterngestalt zu bringen, d. h. also um rechtwinklige Kreuzungen der Strassen, sonst auch *tetrantes* genannt, hervorzubringen. Woher aber Groma, das Instrument, komme, dem Groma, der Platz, den Namen verdankt, sagt Hyginus der Ableitungssüchtige nicht. Und derselbe Hyginus gebraucht in einem und demselben Buche[145]) zuerst Groma für die Vorrichtung, welche wir ebenso genannt haben, dann nicht sehr lange darauf Gnomon für Sonnenuhr. Nein, wir haben in Groma kein latinisirtes griechisches Wort vor uns, viel wahrscheinlicher eine etruskische Erinnerung.

Es ist keine Verlegenheitsaushülfe, welche in diesem Ausspruche sich kundgiebt nach der Regel: Was man nicht definiren kann, das sieht man für etruskisch an. Wir glauben vielmehr noch einer bereits leise angedeuteten Stütze dafür uns bedienen zu können. Schon Müller hat sehr fein hervorgehoben, dass die Beziehung der Ackergrenzen zum Universum den Etruskern mehr ist als eine bloss praktische Gewohnheit. Sie ist eine Heiligung des Besitzes, wie auch die Sage vom Tages[146]) als solche zu verstehen ist; sie ist ein Akt religiöser Weihe, und nirgends als in Italien finden wir demgemäss die Sitte rechtwinklig sich schneidender Strassen und Grenzen so allseitig als allzeitig durchgeführt. Grade dort werden wir darum auch den Ursprung des einfachsten Apparates zum Ziehen zu einander senkrechter Linien suchen müssen, und wo der Apparat entstand, da liess man ihn doch gewiss nicht namenlos. Das schliesst nicht aus, dass das Verständniss dieses alten Namens, den wir uns etwa wie *groma* lautend denken, später und an einem von der Urstätte immerhin verschiedenen Orte abhanden kam,

und dass man alsdann zum Ersatze durch verständlichere Namen schritt. Neben dem räthselhaften *groma* konnte *stella* oder auch *machinula* sich leicht einbürgern; dass neben dem althergebrachten *stella* umgekehrt *groma* zum Kunstausdrucke der Fachmänner geworden wäre, enthält für uns eine an die Unmöglichkeit streifende Unwahrscheinlichkeit.

Stella aber hiess die Vorrichtung, mit der wir uns beschäftigen, mindestens schon im Jahre 100 v. Chr. Mit diesem Namen kam sie zur Kenntniss der Alexandriner, welche inzwischen von wenig verschiedenem, wenn auch bei mangelnder religiöser Begründung seltener auftretendem Bedürfnisse aus gleichfalls feldmesserische Geräthschaften zum Abstecken von Senkrechten erfunden und zur Dioptra ausgebildet hatten. Die Römer, das sind die „Manche“ des Heron[45]), welche des Sternes sich bedienen, dem er nicht mit Unrecht den Vorwurf geringerer Zuverlässigkeit macht. In dieser Meinung beirrt uns die vermeintliche Verwandtschaft, welche Vincent[147]) zwischen der altegyptischen Hieroglyphe für Gegend und der ältesten Form des Groma finden will, um so weniger, als jene Hieroglyphe von den Egyptologen gewiss mit Recht als Städteplan, nicht als feldmesserisches Werkzeug aufgefasst und dem entsprechend „Stadt“, nicht wie Vincent will „Gegend“ (*région*) gelesen wird.

Gehen wir noch mit wenigen Worten auf die mehrfach schon angedeutete Erweiterung ein, welcher der ursprünglich zur Begrenzung des Tempelfeldes erfasste Gedanke unterworfen wurde, als es sich um Gründung von Städten, um Anlegung von Colonien, um Grenzen von Grundeigenthum irgend welcher Art handelte. Wir sehen dabei ab von den religiösen Gebräuchen, welche der eigentliche Gründer der Colonie, der Conditor, selbst vollzieht und vollziehen lässt, wir berücksichtigen nur die Thätigkeit der Feldmesser[148]). Sie sind amtliche Personen, sie bilden in ältester wie in jüngster Zeit eine fest gegliederte Genossenschaft, so dass wir wohl berechtigt waren, am Anfange dieses Abschnittes von einer Zunft der Feldmesser zu reden; eine Zwischenperiode hindurch sind sie dagegen freie Vertreter einer freien Kunst, *professores* ihrer *professio*, *artifices* ihrer *ars*. Sie heissen von diesem ihren Geschäfte her *finitores*

als Grenzbestimmer, *metatores*, *mensores* als Messer, *agrimensores* als Feldmesser, *decempedatores* die mit der 10füssigen Messstange arbeiten, *gromatici* die das Groma handhaben. Die Feldmesser also beginnen ihr Werk mit der Absteckung zweier zu einander senkrechter Linien, des Decumanus und des Cardo. Für jenen wird meistens an der westöstlichen Richtung festgehalten, doch haben Spätere aus Unwissenheit auch wohl die Richtung als Decumanus bezeichnet, in welcher das zu vermessende Gebiet die grösste Ausdehnung besass[149]), oder es wurden bei verändertem Aberglauben die Richtungen gradezu umgekehrt, so dass der Decumanus südnördlich, der Cardo westöstlich verlief. Diese Coordinatenaxen, wie wir sie früher zu bezeichnen wagten, wurden nun als Mittellinien der beiden Hauptstrassen benutzt, welche dieselben Namen wie jene Linien führten und eine beträchtliche Breite hatten, der Decumanus eine etwa noch $1\frac{1}{2}$ bis 2mal bedeutendere als der Cardo[150]). Am Ende des Ersteren befindet sich regelmässig die *porta decumana*, das Thor, durch welches man auf die Heerstrasse, die *via praetoria*, gelangt. Die Hauptstrassen erhalten als solche neben den die Richtung bezeichnenden Namen das Beiwort *maximus*. Neben dem grössten Decumanus und dem grössten Cardo liefen denselben parallel schmalere Strassen einher, welche also zwischen sich Rechtecke, häufig von gleichen Seiten, abschieden, auf welchen die Wohnungen der Colonisten sich erhoben. Die Staatsgebäude, das Gefängniss, das Rathhaus und dergleichen mehr standen in der Mitte der Colonie am Marktplatze, da wo die beiden Hauptstrassen sich kreuzten. Bei der Abtheilung der Aecker war der Feldmesser allerdings durch die mannigfaltigen natürlichen Begrenzungen, durch Bäche und Sümpfe, durch Hügel und Wälder verhindert durchweg so frei zu schalten wie bei Tracirung von Stadtvierteln in offener Gegend. Das Rechteck sollte aber auch hier die Regel bilden, und wie man demzufolge Gärten und Felder rechteckig zu umhägen pflegte, wenn es nur immer anging, so wurden jedenfalls nur über Besitzstücke mit gradlinigen, zu einander senkrechten Grenzlinien Flurkarten öffentlichen Glaubens angefertigt.

In dieser Regelmässigkeit, welche eine Vergleichung der

Grösse irgend welcher Grundstücke ausserordentlich leicht machte, darf gewiss die Ursache gefunden werden, dass den Römern eine genau ausgebildete theoretische Geometrie weniger nothwendig war als anderen Völkern, und daher das mangelnde Bedürfniss auch keine solche Wissenschaft erzeugte. Jedenfalls ist auch nur in Citaten von keinem geometrischen Werke vor Varro die Rede. Erst dieser vielschreibende Freund des Cicero, des Pompeius uud in späterer Zeit des Cäsar, wird als Verfasser einer Geometrie, einer Astronomie, einer Arithmetik genannt[151]). Offenbar hängt dieses mit den Verhältnissen der Zeit zusammen, in welcher Varro lebte. Unter Cäsar sehen wir plötzlich in Rom eine Erscheinung vor uns, welche wir gern einen Aufschwung mathematischer Wissenschaften nennen möchten, wenn die Wirkung nur etwas nachhaltiger, die römische Natur nur etwas empfänglicher dafür gewesen wäre.

Julius Cäsar, der in so vielen Gebieten, als sein umfassender Geist zu beherrschen wusste, unsterblich grosse Mann, der es wohl um die Nachwelt verdient hat, dass sein Name zur Bezeichnung des höchsten weltlichen Ranges geworden ist, hat auch den mathematischen Forschungskreisen nicht fern gestanden. Sei es dass er schon früher neben anderen griechischen Schriftstellern, deren Studium er sich hingab, auch mathematische Werke gelesen, sei es dass der alexandrinische Krieg im Jahre 48—47 ihn erst mit Jüngern dieser Wissenschaft bekannt machte, gesichert ist eine literarische Thätigkeit Cäsars auf astronomischem Gebiete, gesichert der alexandrinische Ursprung seines Wissens[152]), gesichert die praktische Bethätigung seines Interesses durch Berufung fremder Gelehrten zur Durchführung zweier grossartiger Pläne, deren Erfüllung er freilich nicht erleben sollte. Wir meinen die Reform des Kalenders und die Aufnahme der Reichsgrenzen.

Cäsars Schrift *De astris,* welche dem älteren Plinius in der Mitte des I. S. n. Chr. vielfach als Quelle für das XVIII. Buch seiner Naturgeschichte gedient hat, und welchem um 400 Macrobius das Beiwort eines nicht ohne Gelehrsamkeit verfassten Werkes giebt, hängt muthmasslich mit der ersteren Aufgabe, welche Cäsar sich als eine

seiner würdige gestellt hatte, zusammen. Das römische Jahr[153]) war der Sage nach von König Romulus zu 304 Tagen angenommen worden. Die erste Verbesserung rührte von König Numa her, welcher dem Jahre 355 Tage beilegte. Eine zweite Verbesserung, wie es scheint durch die Decemvirn im Jahre 304 der Stadt nach griechischem Muster eingeführt, bestand darin, dass regelmässig alle zwei Jahre ein Schaltmonat, *mensis intercalaris*, abwechselnd von 22 und von 23 Tagen eingeschoben wurde, mit welcher Einschiebung die Priesterschaft betraut war. Damit war freilich eine grosse Machtfülle in deren Hand gelegt, indem die Staatsämter dem Kalenderjahre folgten und somit durch plötzliche Einschaltung eines Monates die Amtsdauer eines Consul verlängert, durch unterlassene Einschaltung die eines anderen Consul verkürzt werden konnte, je nachdem es sich um Persönlichkeiten handelte, welche die Gunst der Priesterschaft erworben oder verschmäht hatten. Mögen auch die Quellen über solche priesterliche Eingriffe vollständig schweigen, so viel ist gewiss, dass über die Einschaltung die grösste Unsicherheit herrschte, die so weit ging, dass Cicero als Proconsul etwa im Jahre 49 bei Atticus anfragt, ob ein Schaltjahr sei oder nicht[154]). Möglicherweise hing diese Unsicherheit auch so zusammen: Die genaue Einschaltung der beiden Schaltmonate musste für einen vierjährigen Zeitraum $4 \cdot 355 + 22 + 23 = 1465 = 4 \cdot 366\frac{1}{4}$ Tage geben, wodurch das Jahr ziemlich genau durchschnittlich um 1 Tag zu lang ausfiel; und nun wird wieder berichtet, man habe versucht zur Ausgleichung des bürgerlichen Jahres mit der Sonne von Zeit zu Zeit einen Schaltmonat wegzulassen, erst regellos wieder nach Willkür der Priesterschaft, dann in 24jährigem Schaltcyclus. Sei dem nun, wie ihm wolle, jedenfalls war zu der Zeit, als Julius Cäsar zu anderen Staatsämtern, welche er in seiner Person vereinigte, noch das Pontificat übernahm, die Sache so sehr im Argen, dass die Chronologie hinter dem wirklichen Jahre um volle 85 Tage zurückgeblieben war. Cäsar, berathen von Sosigenes, schaltete diese fehlenden Tage sämmtlich in dem Jahre 708 der Stadt, 46 v. Chr. ein, einem Jahre, welches damit den Namen des letzten Jahres der Confusion, unter dem

es bekannt ist, glänzend rechtfertigt. Von nun an, so verordnete Cäsar, solle jedes Jahr aus 365 Tagen bestehen, und alle vier Jahre ein Tag zwischen dem 26. und 27. Januar, oder römisch gesprochen zwischen dem *dies septimus* und *sextus ante Calendas Februarias* als *bissextus* eingeschaltet werden, woraus der Name des bissextilen Jahres für das Schaltjahr entstand.

Wer war nun Sosigenes, der Rathgeber Cäsars bei dieser Neuerung[155])? Plinius nennt ihn einen Peripatetiker, Simplicius giebt Egypten als seine Heimath an und noch andere Schriftsteller nennen Werke, welche er verfasste, deren Titel aber für sich allein einen Rückschluss auf den möglichen Inhalt kaum gestatten. Was die Persönlichkeit des Sosigenes betrifft, so glauben wir nicht irre zu gehen, wenn wir in dem als Egypter Bezeichneten einen Schüler der alexandrinischen Gelehrsamkeit erkennen, der vielleicht erst mit Cäsar seine Heimath verlassen haben mag.

Neuere Entdeckungen haben in überraschender Weise gezeigt, dass es Nichts neues war, was Sosigenes dem Cäsar empfahl, sondern dass er nur unter mächtigerem Schutze von besser gewähltem Ausgangspunkte aus eine Einrichtung auffrischte, welche etwa zwei Jahrhunderte früher in der Heimath des Sosigenes während einer gewissen Zeit in Uebung war.

Im April 1866 wurde im Nildelta bei Tanis eine zweisprachige Inschrift gefunden, welche griechisch und egyptisch ein Dekret verkündigte, das die in Canopus, wenige Wegstunden von Alexandrien, versammelte Priesterschaft unter dem Datum des 19. Tybi des 9. Regierungsjahres Ptolemäus III., Euergetes I., d. i. am 7. März 238 v. Chr. erlassen hatte. Dieser von dem Orte der Beschlussfassung her als Edict von Canopus bezeichnete Erlass befiehlt[156]) auf Zeile 40 bis 46 der griechischen und dem entsprechend auf Zeile 20 bis 23 der hieroglyphischen Inschrift, dass „damit auch die Jahreszeiten fortwährend nach der jetzigen Ordnung der Welt ihre Schuldigkeit thun und es nicht vorkomme, dass einige der öffentlichen Feste, welche im Winter gefeiert werden, einstmals im Sommer gefeiert werden, indem der Stern um einen Tag alle vier Jahre weiterschreitet,

andere aber, die im Sommer gefeiert werden, in späteren Zeiten im Winter gefeiert werden, wie das sowohl früher geschah als auch jetzt wieder geschehen würde, wenn die Zusammensetzung des Jahres aus den 360 Tagen und den 5 Tagen, welche später noch hinzuzufügen gebräuchlich wurde, so fortdauert: von jetzt an 1 Tag als Fest der Götter Euergeten alle 4 Jahre gefeiert werde hinter den 5 Epagomenen und vor dem Neuen Jahre, damit Jedermann wisse, dass das, was früher in Bezug auf die Einrichtung der Jahreszeiten und des Jahres und das hinsichtlich der ganzen Himmelsordnung Angenommene fehlte, durch die Götter Euergeten glücklich berichtigt und ergänzt worden ist.‟

Mag nun, wie Lepsius meint, dieses Fest der Euergeten, d. h. also der alle 4 Jahre wiederkehrende Schalttag, nur 5mal gefeiert worden sein, in den Jahren 238, 234, 230, 226, 222; oder mag nach Untersuchungen von Lauth[157]) die Feier dem Dekrete vorgreifend im Ganzen 6mal in den Jahren 244, 240, 236, 232, 228, 224 vollzogen worden, dann unter König Ptolemäus Philopator wieder aufgehoben worden sein, bis Augustus das Schaltjahr in Egypten zwischen 25 und 22 v. Chr. auf's Neue einführte; oder mag nach Dümichen[158]) die Kalenderreform auch nach Philopator noch in Gang geblieben sein, auf diese kleinen Unterschiede kommt es uns nicht an, die wir uns an der von allen diesen Gelehrten auf Grund der Inschrift einstimmig behaupteten Thatsache genügen lassen können, dass um 238 v. Chr. das alle 4 Jahre wiederkehrende Schaltjahr in Egypten befolgtes Landesgesetz war. Wir dürfen vielleicht daran anknüpfen[159]), dass Eratosthenes, der Freund des Ptolemäus III. Euergetes und seiner Gemalin Arsinoe damals am Ende seiner dreissiger Jahre in vollster Mannesblüthe stand, dass er eine uns verloren gegangene Chronologie geschrieben hat, vielleicht Grund genug ihn mit jener chronologischen Neuerung in einige Verbindung zu setzen. Wir dürfen ferner vielleicht den Umstand, dass von dieser so feststehenden bedeutsamen Reform in keinem alexandrinischen Schriftsteller bisher die leiseste Spur hat aufgefunden werden können, denjenigen Gelehrten zur Beachtung em-

pfehlen, welche in mathematisch-historischen Dingen ihre Zweifelsucht mit den mangelnden Berichten gleichzeitiger Schriftsteller nähren, auch da, wo es durchaus an Werken fehlt, in welchen man solche Berichte zu finden hoffen dürfte.

Kehren wir zu Julius Cäsar und der nach ihm benannten Julianischen Kalenderreform zurück. Das Jahr 46 v. Chr., so sagten wir, bildete das letzte Jahr der Verwirrung. Das folgende Jahr 45 begann höchst wahrscheinlich als Schaltjahr die neue Zeitrechnung. Am 15. März 44 verblutete Cäsar unter den Dolchen der Verschwörer und mit seinem Geiste entflog auch wieder der von ihm ausgegangene richtige chronologische Gedanke. Wenn auch die verehrungsvolle Anhänglichkeit Marc Antons noch im Jahre der Ermordung es durchsetzte, dass der Monat Quintilis, in welchem sein Freund geboren war, ihm zu Ehren den Namen Julius empfing, wenn auch die Absicht bestand, die Reform des Jahres beizubehalten, die Priesterschaft, entweder Cäsars Wille missverstehend oder ihn absichtlich missdeutend, weil sie bei der Verwirrung besser ihren Vortheil fand, schaltete von nun an gleich im dritten Jahre einen Schalttag ein, so dass die Jahre 42, 39, 36, 33, 30, 27, 24, 21, 18, 15, 12, 9 zwölf Schaltjahre bildeten, während richtiger Weise nur die Jahre 41, 37, 33, 29, 25, 21, 17, 13, 9 also im ganzen neun Jahre diese Eigenschaft haben durften. Das Jahr war wieder um drei Tage der richtigen Zeitrechnung vorausgeeilt. Dies erkannte Augustus und befahl in einem Edicte vom Jahre 9 oder 8, es sollten die nächstfolgenden drei Schaltjahre 5, 1 v. Chr. und 3 n. Chr. als Gemeinjahre gelten, erst im Jahre 7 n. Chr. solle wieder ein Schaltjahr von 366 Tagen eintreten und dann nach Cäsars wohlverstandener Meinung stets im vierten Jahre sich wiederholen. Dasselbe Edict enthielt auch die Uebertragung des Namens Augustus auf einen Monat, als welcher aber nicht der Geburtsmonat des Fürsten, der September, sondern der Sextilis gewählt wurde wegen der vielen in diesem Monat erfochtenen Siege.

Die Kalenderreform hat Cäsar nach unserer Auffassung aus Alexandrien mitgebracht. Vielleicht entwickelte sich eben dort in seinem Geiste der zweite grosse Gedanke,

welchen wir bereits ankündigend genannt haben, der Gedanke einer Vermessung des ganzen römischen Reiches[160]). Ueber diese Vermessung stehen einige Angaben alter Schriftsteller zu Gebote, welche in ihrem Wortlaute die Bürgschaft vollster Zuverlässigkeit gewähren. Die wichtigste Stelle stammt aus einem geographischen Werke, welches einem gewissen Aethicus als Verfasser zugeschrieben zu werden pflegt und von welchem ein im Vaticane aufbewahrter Codex einen weitaus richtigeren Text lieferte als vor Auffindung dieser Handschrift bekannt war. „Julius Cäsar also der Erfinder des Schaltjahres, mit Kenntnissen in göttlichen und menschlichen Dingen ausgerüstet wie Keiner, liess, sobald er das Consulat angetreten, einen Senatsbeschluss fassen, wonach der ganze Erdkreis, soweit er römischen Namen trug, durch umsichtige und mit der Gabe jeglichen Wissens geschmückte Männer vermessen werden sollte.“ An diese bestimmte Angabe knüpfen sich die Namen der für diese Zwecke ausersehenen Männer: für den Osten entweder Zenodoxus oder nach der anderen Lesart Nikodemus, für den Norden Theodotus, für den Süden Polyclitus, während für den Westen nur die Handschrift des Vatikan einen Namen Didymus angiebt. Eine freilich selbst auf sehr schwachen Füssen stehende Stütze bildet sodann noch der Bericht eines Schriftstellers aus dem Anfange des XIII. S., des Albertus Magnus, welcher noch andere theilweise verwandte Namen uns überliefert: für den Osten Eudoxus, für den Norden Theodorus, für den Süden Polycletus, den Westen hätten die Römer schon gekannt, der habe keiner Ausmessung mehr bedurft[161]). Der Streit um die richtigere Lesart dieser Namen dürfte ein um so müssigerer sein, als dieselben darin übereinstimmen, dass sie den nichtrömischen Ursprung ihrer Träger gleichmässig bezeugen. Der griechische Klang ist unverkennbar und von dem einen Namen, dem am Wenigsten gesicherten, wie wir zugeben, wissen wir ganz bestimmt, dass er in Alexandrien heimisch war, dass ein Didymus dort eine Schrift über Ausmessung von Steinen und Balken muthmasslich zu Anfang der christlichen Aera verfasst hat[162]). Bis in die Nähe dieser Epoche reicht aber sicherlich die Ausführung der grossen Reichs-

vermessung, welche Cäsar auch in ihren Anfängen nicht mehr erlebte, wenn anders die uns wenigstens überzeugende Berechnung Ritschl's die Wahrheit trifft. Darnach begann die Vermessung des Ostens zwischen 37 und 34 und war 31 vollendet; ihr folgte die Vermessung des Westens von 31 bis 28, des Nordens von 28 bis 25, des Südens von 25 bis 20, eine Zeitdauer, welche mit dem Umfange der gestellten Aufgabe und den damals nicht bloss wissenschaftlichen Schwierigkeiten ihrer Lösung gar wohl in Einklang zu bringen ist. Freilich werden statt der griechischen Namensliste des Kosmographen von römischen feldmesserischen Schriftstellern andere Leiter des Unternehmens genannt[163]). Bald ist es ein Balbus, der die Vermessung auszuführen hatte, bald ist des Augustus Name allein überliefert, bald ist es M. Vipsanus Agrippa, dem der Ruhm des Unternehmens zufällt. Die Lösung der Widersprüche dürfte von Ritschl in richtiger Weise gegeben worden sein. Allerdings waren es ursprünglich vier Alexandriner, welchen die grosse, mühevolle Aufgabe gestellt war, aber der Oberwegemeister Balbus musste vielleicht dem Unternehmen einen römischen Charakter verleihen und endlich die Theilnahme des Agrippa ist als eine interessevolle Fürsorge zu denken, welche zwar den Arbeiten als solchen fernstand, aber die Ergebnisse derselben sammelte, ordnete, wahrscheinlich herausgab. Das einstige Vorhandensein einer grossen Landkarte, welche den Namen des Agrippa führte und welche in einer besonders dazu aufgebauten Säulenhalle „der Welt die Welt als Schauspiel darbot“[164]), ist verbürgt; ebenso sind es die geographischen Commentarien des Agrippa, auf welche ganze Bücher aus der Naturgeschichte des Plinius sich stützen[165]). Damit gewinnt die weitere Vermuthung an Wahrscheinlichkeit, jener Kosmographe Aethicus, dessen Name seit Ritschl als aus einem appellativen Ethnicus entstanden vermuthet wird, während er in Wirklichkeit Julius Honorius hiess, habe auch noch die Commentarien des Apripipa vor sich gehabt und habe sie nur einer zeitgemässen Ueberarbeitung unterworfen, für welche die Jahre zwischen 412 und 427 zu Gebote stehen[166]).

Jedenfalls also, und das genügt für unsere Zwecke, hat

unter Cäsar und Augustus eine allgemeine römische Reichsvermessung stattgefunden[167]). Jedenfalls wurden zu diesem Zwecke von Anfang an auswärtige und zwar muthmasslich alexandrinische Kräfte in Anspruch genommen, wie auch bei der Jahresreform einem dort einheimischen Astronomen der Löwenantheil der Arbeit zugefallen war.

Uebereinstimmend mit der Hälfte unserer Behauptung, die auf Cäsar's Betheiligung sich bezieht, hat ein römischer Feldmesser den Ursprung seiner Kunst auf Cäsar zurückgeführt[168]), sei es, dass dieser wirklich, vielleicht zur Unterstützung jenes Senatsbeschlusses, der die Reichsvermessung anordnete, einen auf die Sache selbst sich beziehenden Brief verfasste, der damit ein Seitenstück zu seiner obengenannten Schrift über die Sterne[152]) bildete, sei es, dass römischer Stolz es nicht eingestehen mochte, dass die ganze spätere Feldmessung der Weltbeherrscher auf ausländischem Boden gewachsen war und es vorzog, den Namen dessen anzugeben, unter welchem, als deren, von welchen man gelernt hatte. Ganz unehrlich verfuhr übrigens der betreffende wahrscheinlich ziemlich späte Schriftsteller nicht, selbst wenn man die zweite Erklärung seines Ausspruches der ersten vorzieht. Nur von der Kunst des Feldmessens spricht er, und mindestens seit dem VII. S. waltet im Sprachgebrauche ein förmlicher Gegensatz zwischen Kunst und Wissenschaft[169]). Jene umfasst das mehr Zufällige, das dem Wechsel Unterworfene, diese das Nothwendige, das Unveränderliche. Auf Feldmessung bezogen würde die Kunst das Gewerbmässige, die Absteckungen u. s. w. in sich schliessen, die Wissenschaft dagegen die Berechnungen auf theoretischer Grundlage. In diesem Sinne mag immerhin die Kunst der Feldmessung bis zu einem gewissen Grade römisch genannt werden, nur die Wissenschaft war griechisch. In diesem Sinne durften auch Varro und Hyginus, wo sie dem Ursprunge der Kunst nachspürten, die Absteckung der Grenzen von den Etruskern ableiten[123]). Dem war in der That so, und wo es um nichts weiter, als um diese rechtwinkligen Grenzen sich handelte, durften die Alexandriner unerwähnt bleiben. Die Alexandriner, wir wiederholen es, brachten nur die Wissenschaft mit sich nach Rom, Formeln

zur Inhaltsberechnung irgendwie begrenzter Grundstücke und Aehnliches, welches sich jetzt erst als nothwendig erwies, während es entbehrlich war, so lange die regelmässigen Rechtecke des altrömischen Grundbesitzes allein Gegenstand der amtlichen Flurkarten, des gerichtlichen Verkehres bildeten.

In welcher Form um Varro's Zeit, oder genauer gesagt, in den letzten 50 Jahren vor Christi Geburt, die Feldmesswissenschaft in Rom einwanderte, darüber ist Zweifel nicht möglich. Alexandrinische Astronomen und Geometer konnten nur dasjenige Material mit sich führen, welches damals in ihrer Heimath in allen Händen sich befand. Die Werke des Heron von Alexandrien mussten ihnen dienen, und wirklich gelingt es, bis auf geringe Ausnahmen sämmtliche Formeln, Rechnungen und feldmesserische Veranstaltungen, welche bei römischen Schriftstellern sich vorfinden, auf Stellen der uns als heronisch überlieferten Schriften zurückzuführen. Venturi und Vincent, Martin und Hultsch haben sich an solchen Vergleichungen versucht und mit Glück versucht, doch dürften auch nach ihnen noch manche bisher nicht hervorgehobene Berührungspunkte namhaft gemacht werden können. Wir wollen bei unseren Auseinandersetzungen auf diesem Gebiete so viel als möglich die chronologische Reihenfolge der Schriftsteller einhalten, bei welchen wir auf heronische Spuren gestossen sind, müssen aber allerdings die in den Worten „so viel als möglich" liegende Beschränkung zulassen, da es nicht von allen hier zu erwähnenden Schriftstellern mit gleichem Grade von Zuverlässigkeit bekannt ist, welcher Zeitepoche sie angehört haben[170]).

An die Spitze gehört jedenfalls ein Werk, dessen Entstehung ziemlich rasch auf die Einführung alexandrinisch-mathematischer Wissenschaft in Rom folgte: die 10 Bücher über Architektur verfasst von Vitruvius muthmasslich im Jahre 14 v. Chr.[171]). Welchen Beinamen Vitruvius geführt haben mag, ist mit Sicherheit nicht anzugeben. Eine Inschrift zu Verona nennt uns einen Freigelassenen des Lucius, L. Vitruvius Cerdo; der Verfasser einer geometrischen Schrift spätestens aus dem VI. S. spricht von einem Vitruvius Rufus Architecton; ein nach Rose's Annahme ziemlich alter Epitomator der 10 Bücher über Architektur

weiss von deren Verfasser als Vitruvius Pollio. An Auswahl fehlt es demnach nicht, und bestechend für den letzten wohl allgemein als wahrscheinlich richtig angenommenen Beinamen ist hauptsächlich der Umstand, dass wir von ihm wissen, jener unbekannte Epitamator habe ihn unserem Schriftsteller beigelegt, während die beiden anderen Vitruviusse nicht zu identificiren sind. Auch von der Heimath des Vitruvius weiss man Nichts und über seine Lebensverhältnisse nur was aus seinen eigenen Aussagen hervorgeht, dass er in innigem Verhältnisse zu Augustus stand, welchem er sein Werk zugeeignet hat. Die Form dieses Werkes ist als vielfach abstossend und wunderlich bezeichnet worden. Wunderlich, damit stimmt unser Urtheil überein, aber abstossend möchten wir dieselbe so wenig nennen, dass wir im Gegentheil die vitruvische Architektur zu den Schriften rechnen, welche wir mit dem grössten Vergnügen gelesen haben und nicht bloss während der Materialiensammlung für diese Monographie, während welcher die Mehrzahl der zu bewältigenden Autoren die Genügsamkeit sehr zu erhöhen im Stande war. Die absonderliche Anekdotenhascherei des Vitruvius ist geradezu ergötzlich, und wir sind zu der Ueberzeugung gekommen, dass weder in der Geschichte der Mathematik, noch der Physik, noch der Chemie sein Werk genügend benutzt worden ist, welches allerwärts den Schüler der Griechen verräth, wenn auch einen solchen, der es mitunter wagt, von der Ansicht des Lehrers sich zu entfernen. Scheint es uns doch von Interesse, dass bei Vitruvius neben der alten Theorie des Sehens mittelst aus den Augen kommenden Strahlen auch die entgegengesetzte Möglichkeit anerkannt wird, dass der Anstoss von dem Sehobjecte herrühre[172]). Begegnen wir doch bei ihm einer Theorie der Luftbewegung, welche sehr an Heron erinnert, und einer Benutzung von erwärmten, mit Wasser gefüllten Windkugeln, welche als unvollkommene Anfänge der bei Heron erläuterten Dampfreactionsmaschine sich erkennen lassen[173]). Finden wir doch einen Abriss der arithmetischen Harmonienlehre nach Aristoxenus, einen Abriss der alten Astronomie, Beschreibungen von hydrodynamischen Erfindungen des Ktesibius, von dessen Wasserorgel und dessen Wasserhebe-

maschinen neben der Schilderung der drei grossen mathematischen Entdeckungen: der Irrationalität der Diagonale eines Quadrates, des Pythagoräischen Dreiecks aus den Seiten 3, 4, 5, der archimedischen Kronenrechnung, und neben zwei Beschreibungen des Gnomon, bei deren erster die erste Methode des Hyginus zur Auffindung der Mittagslinie gelehrt ist[174]). Die Verwandtschaft zu Herons feldmesserischen Schriften tritt deutlich hervor in der Anweisung zum Nivelliren, welches mit Hülfe der Dioptra oder der Wasserwage oder auch der Chorobate vorgenommen werden könne[175]) und in der Beschreibung eines Wegemessers. Ist zwar derselbe weniger vollkommen als der bei Heron beschriebene, so hat doch schon Venturi daran erinnert[176]), dass gerade Heron seinen Vorgängern ähnliche aber minder genaue Apparate zuschreibt[51]), deren einer nicht unwahrscheinlicher Weise uns hier auf römischem Boden in der Schilderung des Vitruvius erhalten ist. Es darf vielleicht auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass an dieser einzigen Stelle des Vitruvius eine geometrisch zu verwerthende Zahlenangabe sich findet. Der Umfang eines Rades von 4 Fuss Durchmesser wird gelegentlich zu $12\frac{1}{2}$ Fuss angegeben, welches der Gleichung $\pi = 3\frac{1}{8}$ entspricht. Wir sind diesem Werthe ausserhalb Vitruvius bei unseren Forschungen erst ein einziges Mal begegnet und zwar in dem ersten Viertel des XVI. S. bei Albrecht Dürer. Wir sind weit entfernt davon einen Zusammenhang behaupten zu wollen, können aber doch wieder die conservative Kraft der mittelalterlichen Bauhütten, von welchen wir noch ein zweites Beispiel bei Gerbert im dritten Abschnitte anzugeben haben werden, nicht ganz ausser Augen lassen. Wir bemerken daher etwas weitläufiger, dass Albrecht Dürer in seiner „Unterweisung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheyt u. s. w.“ als annähernd richtig lehrt, eines Quadrates Diagonale in 10 Theile getheilt und davon 8 als Durchmesser eines Kreises gewählt bilde den Kreis gleicher Fläche mit dem Quadrate. Die Quadratseite a giebt für die Diagonale $a\sqrt{2}$, der Kreisdurchmesser wird demnach $2r = \frac{8}{10} a \sqrt{2}$, der Halbmesser $r = \frac{4}{10} a \sqrt{2}$, der Kreisinhalt

$\pi r^2 = \frac{8}{25} a^2 \pi$, und da er $= a^2$ sein soll, so zeigt sich $\pi = 3\frac{1}{8}$. Es scheint uns gestattet wenigstens auf diese Construction aufmerksam zu machen mit der Bitte an alle Fachgenossen, es der Oeffentlichkeit nicht vorzuenthalten, wenn sie derselben irgendwo in der Zeit zwischen Vitruvius und Dürer begegnen sollten.

L. Junius Moderatus Columella[177]) aus Gades (Cadix) war Militärtribun der VI. gepanzerten Legion und lebte als solcher längere Zeit in Syrien. Von dort heimgekehrt, widmete er sich mit begeisterter Anhänglichkeit der Landwirthschaft, welche er in zwei Werken nach einander verherrlichte. Von der ersteren kürzeren Ausarbeitung ist nur ein Bruchstück erhalten, die zweite ausführliche Schrift ist dagegen vollständig auf uns gekommen. Die 12 Bücher „*De re rustica*“, wahrscheinlich 62 n. Chr. geschrieben, sind eine fast unerschöpfliche Fundgrube reichsten Materials auf allen Gebieten, welche zur Landwirthschaft irgend in Beziehung gesetzt werden können, da der begabte und gelehrte Verfasser seinen Gegenstand in weitester Fassung begreift. Freilich ist damit für ihn die Unbequemlichkeit entstanden, dass man, wie er selbst klagt, über alle mögliche Dinge Auskunft von ihm begehre. So gut er kann hilft er sich; er zieht befreundete Fachmänner verschiedener Gattung zu Rathe, und so gesteht er auch zu, dass das 2. Kapitel des V. Buches, in welchem er Feldmessung lehrt, kein Erzeugniss seines eigenen Geistes sei[178]). Für Vollständigkeit oder Unvollständigkeit, sowie für die Richtigkeit der gegebenen Vorschriften sind diejenigen verantwortlich, welche ihm hier mit ihrer Erfahrung beigestanden haben. Zuerst macht Columella seinen Leser mit den unentbehrlichsten Ackermaassen bekannt, dann löst er neun geometrische Aufgaben je an einem bestimmten Zahlenbeispiele. Allgemeine Vorschriften, wie bei anderen Zahlenangaben zu verfahren sei, giebt er nicht; diese solle der Leser sich selbst aus der Musterrechnung entnehmen[179]). Mit welchem Erfolge dies mitunter geschah, wird ein später zu erörternder Fall uns lehren. Die Aufgaben sind folgende:

1. Jede Seite eines Quadrates ist 100 Fuss lang; die Fläche ist 100 mal 100 oder 1000.
2. Die Seiten eines Rechteckes sind 240 und 120, die Fläche ist 120 mal 240 oder 28800.
3. Ein Paralleltrapez von der Länge 100, von den Breiten 20 und 10 hat zur Fläche $\frac{20+10}{2}$ mal 100 oder 1500.
4. Ein gleichseitiges Dreieck von der Seite 300 hat die Fläche $\frac{300^2}{3} + \frac{300^2}{10} = 39000$.
5. Ein rechtwinkliges Dreieck von den Katheten 50 und 100 hat die Fläche $\frac{50 \cdot 100}{2} = 2500$.
6. Ein Kreis vom Durchmesser 70 hat die Fläche
$$\frac{70^2 \cdot 11}{14} = 3850.$$
7. Ein Halbkreis von der Grundlinie (*basis*) 140 und von der Breite (*curvaturae latitudo*) 70 hat die Fläche
$$\frac{70 \cdot 140 \cdot 11}{14} = 7700.$$
8. Ein Kreisabschnitt, der kleiner ist als der Halbkreis, hat die Grundlinie 16, die Breite 4, seine Fläche ist $\frac{(16+4) \cdot 4}{2} + \left(\frac{16}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{14}$ oder Weniges mehr als 44.
9. Eines Hexagons von der Seite 30 Fläche ist $\frac{30^2}{3} + \frac{30^2}{10}$, welches noch versechsfacht wird $= 2340$.

Wir haben hier überall nur nach dem Sinne, nicht nach dem Wortlaute berichtet und sind auch darin von dem Originale abgewichen, dass wir die schliessliche Umformung in Ackermaasse beseitigt haben. Wir haben dadurch allerdings eine Lücke entstehen lassen, welche bei allen von uns behandelten Schriftstellern die gleiche sein wird. Wir geben es zu, dass die metrologischen Untersuchungen, namentlich von Hultsch, eine Ausfüllung aller dieser Lücken möglich machen; allein einestheils bedarf es dazu von Seiten dessen, der der Ausfüllung sich unterzieht, eine weit vollkommenere Beherrschung sämmtlicher antiken Maasse, als wir sie in Anspruch nehmen dürfen, und andertheils meinen wir, dass für den mathematisch-historischen Zweck, der

uns vorschwebt, alle jene Maasse doch nur Mittel zweiten Ranges sind, unnöthig, wenn man durch andere Dinge zu den gewünschten Schlussfolgerungen zu gelangen im Stande ist. Unsere Darstellung macht daher eine besondere Behandlung der in den von uns zu besprechenden Schriftstellern vorkommenden Maasse nicht überhaupt entbehrlich, wohl aber, wie wir glauben, entbehrlich für den Nachweis des Zusammenhanges geometrischen Wissens vom I. S. v. Chr. bis weit nach dem X. S. n. Chr.

In Bezug auf Columella tritt dieser Zusammenhang auf den ersten Anblick hervor, und den Augen den richtigen Zielpunkt zu verschaffen, haben wir nur die verschiedenen Aehnlichkeiten zu beleuchten, welche sämmtlich schon von Hultsch beobachtet worden sind. Wer könnte gleich in der Methode, keine allgemeine Regel als solche auszusprechen, sondern Musterbeispiele vorzuführen, den Schüler des Heron von Alexandrien verkennen? wer in den Formeln, welche mit eingeschlossen in den Beispielen liegen, und welche gestatten förmliche Gleichungen zwischen Columella und den von Hultsch herausgegebenen heronischen Schriften aufzustellen[180])? Ja die Zahlenbeispiele selbst, welchen wir bei Columella begegnen, lassen Rückschlüsse zu, die uns gestatten, eine Frage zu entscheiden, welche die heronischen Schriften betrifft.

In der jetzt auf uns gekommenen Form der heronischen Geometrie bietet das Kapitel, welches mit den regelmässigen Vielecken sich beschäftigt, eine besondere Eigenthümlichkeit dar. Die Fläche des Fünfecks und des Sechsecks wird nach zwei Vorschriften gelehrt[181]). Die Fläche des Fünfeckes sei das Quadrat der Seite 12mal genommen und durch 7 getheilt, nach einem anderen Buche des Heron finde man sie, wenn man das Quadrat der Seiten mit 5 vervielfache und durch 3 theile; das Sechseck habe zur Fläche das Quadrat der Seite 13mal und durch 5 getheilt, anders in einem andern Buche, wo die Vorschrift sei $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{10}$ des Seitenquadrates 6fach anzusetzen. Es liegt nun schon an und für sich sehr nahe bei Festhaltung der Annahme von einem einheitlichen Werke Herons in diesem „anderen Buche" eine andere Bearbeitung entweder des

ganzen Werkes oder des als Geometrie auf uns gekommenen Abschnittes zu erkennen, nach neuem Sprachgebrauche eine wiederholte und verbesserte Auflage, als dem Alterthume keineswegs fremdartige Uebung. Die Zahlenbeispiele Columella's leisten dieser Auffassung den entschiedensten Vorschub. Dass nämlich die Schrift, welcher der Römer sie unmittelbar oder mittelbar, aus dem griechischen Originale oder aus einer zu Augustus Zeiten angefertigten lateinischen Bearbeitung, entnahm, in den sämmtlichen 9 Aufgaben mit der Geometrie Heron's übereinstimmende Berechnungsweisen besass, haben wir schon gesehen; dass daraus die Formel für die Fläche des Kreisabschnittes als zu Heron's Zeit in Uebung erwiesen wird, bemerken wir nebenbei; hauptsächlich aber sehen wir, dass Columella's Zahlen mit denen der uns bekannten Geometrie nur in dem 9. Beispiele übereinstimmen, in jenem Beispiele, welches die Methode des „anderen Buches“ befolgt. Da liegt doch in der That die Vermuthung so nahe, dass sie kaum abzuweisen ist, die Zahlen Columella's seien überhaupt dem „anderen Buche“ entnommen; und finden wir auch bei anderen Römern immer wieder Heronisches, meistens an anderen Zahlenbeispielen als wir in unserem Heron an den entsprechenden Stellen wiederfinden, so wird auch dafür derselbe Erklärungsgrund ausreichen: Die Römer haben sich einer anderen Auflage des Heron bedient; ja dieselbe Aushülfe macht uns endlich begreiflich, wie es sehr wohl sein kann, dass in römischen Schriften einzelne Aufgaben der anderen Auflage des Heron vorkommen, welche unser griechischer Heron nicht enthält.

Kehren wir noch einen Augenblick zu Columella zurück, um der Vollständigkeit wegen bei zwei Stellen aus früheren Büchern zu verweilen, welche wenn auch viel weniger wichtig als das 2. Kapitel des V. Buches gemeiniglich erwähnt zu werden pflegen[182]). Sie bezeugen nur, die erste, dass der Gebrauch der Wasserwage zu Columella's Zeit ein so verbreiteter war, dass der Verfasser es wagen durfte einen von ihm erfundenen Furchenzieher mit einer solchen zu versehen, und die erste ebenso wie die zweite, dass das Wort „Stern“ überall da in Anwendung zu kommen pflegte, wo Etwas

die Kreuzesform besass, also nur an einen Stern mit vier Zacken zu denken ist, gleichwie wir es bei dem feldmesserischen Werkzeuge dieses Namens gesehen haben.

Sextus Julius Frontinus[183]) lebte etwa in den Jahren 40 bis 103. Die Regierungen des Vespasianus, des Titus, des Domitianus, des Nerva und des Trajanus folgten sich, während Frontinus in verschiedenen Stellungen dem Staate seine Dienste widmete. Dem Hauptinhalte nach kamen die Aemter, welchen er vorstand, auf das Ingenieurfach hinaus, sei es, dass die friedliche, sei es, dass die kriegerische Richtung desselben in's Auge gefasst wird. Vorschriften über die Feldmesskunst scheinen unter Domitian's Regierung das erste Erzeugniss seiner Feder gewesen zu sein. Ihnen folgte rasch darauf, und wohl noch bevor von Decebalus dem Dacierkönige ein für Rom schmählicher Friede erzwungen worden war, Kriegswissenschaftliches muthmasslich in zwei verschiedenen Schriften. Ein Werk über Wasserleitungen unter Nerva begonnen, unter Trajanus etwa 98 n. Chr. beendigt, bildet den Schluss seiner schriftstellerischen Thätigkeit. Leider besitzen wir in Vollständigkeit und unverfälscht durch fremde Zuthaten nur das letztgenannte Büchlein[184]), welches nach des Verfassers eigener Angabe, die wir nicht grade als von ihm selbst am Wenigsten geglaubte Bescheidenheitsfloskel auffassen möchten, verhältnissmässig unreif in die Oeffentlichkeit drang. Kaiser Nerva, so sagt Frontinus in der Vorrede, habe ihn dem sämmtlichen Wasserwesen vorgesetzt; um sich selbst über seine Pflichten klar zu werden, schreibe er dies Büchlein, welches dann auch möglicherweise für seine Nachfolger im Amte nützlich sein könne; was er dagegen früher geschrieben, habe sich stets auf Dinge bezogen, mit welchen er durch lange Uebung vertraut war, und sei daher der Hauptsache nach mit Rücksicht auf die Belehrung seiner Nachfolger entstanden. Für unsere Zwecke ist aus dieser Wasserleitungslehre nur der Theil hervorzuheben, in welchem Frontinus aus dem gegebenen Durchmesser von Röhren deren Umfang errechnet. Darf man doch im Voraus darauf gespannt sein, ob hier die Verhältnisszahl $3\frac{1}{7}$, ob etwa die $3\frac{1}{8}$ benutzt sei, auf deren Spur wir oben bei Vitruvius aufmerk-

sam gemacht haben, und welche bei Begnügung mit angenäherten Werthen entschieden den Vortheil leichterer Zahlenrechnung mit sich führte, da römische Längenmaasse einer Theilung durch 8 sich leicht anpassten, während die Theilung durch 7 mindestens unbequem war. Frontinus benutzt trotzdem entschieden die Verhältnisszahl $3\frac{1}{7}$, wenn auch die Ergebnisse so abgerundet sind, dass sie in ganzen kleinsten Längen sich aussprechen lassen.

Ueber die kriegswissenschaftlichen Arbeiten des Frontinus dürfen wir stillschweigend hinweggehen. Um so ausführlicher müssten wir uns sicherlich mit dem Lehrbuche der Feldmesskunst desselben Verfassers beschäftigen, wenn es nur vorhanden wäre! Freilich auch dann nicht, wenn die Vermuthung Hultsch's begründet wäre[185]), dass Frontinus ausschliesslich die juristische Seite der Gromatik behandelt habe, welcher ein Nichtjurist wohl nicht viel mehr Geschmack als Verständniss abzugewinnen im Stande ist. Allein dieser Ansicht widerstrebt, wie wir meinen, der ganze Charakter der schriftstellerischen und amtlichen Thätigkeit des Frontinus, eines Ingenieurs, wie wir oben sagten, der also nothgedrungen und der Vollständigkeit wegen sich gezwungen fühlen konnte, auch Juristisches, aber nicht ausschliesslich Juristisches zum Gegenstande eines Werkes aus zwei Büchern zu machen. Zudem dürfen wir uns für unsere Meinung auf die Autorität eines recht alten Gewährsmannes stützen, welcher wahrscheinlich am Anfange des XII. S. ein Buch des Frontinus gekannt hat, in welchem Flächeninhalte von Vierecken berechnet wurden[186]), was jedenfalls nicht zu den Rechtscontroversen gehören kann. Unserer Meinung, als ob die Gromatik des Frontinus in ihren wichtigsten Theilen verloren gegangen sei, widerspricht gleichfalls eine Behauptung eines mit Recht auf's Höchste geachteten französischen Fachgenossen in der Geschichte der Geometrie. Chasles[187]) meint, ein bedeutsames Stück jenes Werkes sei in einem anonymen Fragmente auf uns gekommen, welches einen Theil der berühmten Handschrift von Chartres bilde, von der ein anderer Theil den Namen der Handschrift *C* der Geometrie des Boetius erhalten hat. Da indessen die Gründe alterthümlicher Schreibart, reineren

und leichteren Styls, ferner der Uebereinstimmung mit dem zweiten Buche der Geometrie des Boetius kaum eine subjective Muthmassung gestatten, darin Frontinus als Verfasser wieder zu erkennen, keinenfalls zu einem objectiven Beweise dieser Hypothese hinreichen, so ziehen wir es vor, hier noch nicht von jenem Bruchstücke zu handeln, wem es auch angehöre, sondern es für später unter dem Namen des Anonymus von Chartres uns aufzusparen.

Gesichert sind uns aber nach Ausscheidung dieses vielleicht frontinischen Stückes nur recht dürftige Ueberbleibsel aufgefunden in dem Codex Arcerianus der Wolfenbüttler Bibliothek. Was enthält diese Handschrift, die an hohem Alter, wie an guter Erhaltung nur wenige ihres gleichen besitzt? Der Hauptsache nach ist sie ein Quellenwerk der Rechtswissenschaft. Mommsen, auf dessen durch zahlreiche Belege gesicherte Untersuchung wir uns mit vollem Vertrauen stützen, nimmt an[188]), um das Jahr 450 seien aus älteren Schriften, sämmtlich auf Gebietseintheilungen, Agrargesetzgebung u. s. w. bezüglich, amtliche Auszüge veranstaltet worden, und diese habe der Schreiber des Codex Arcerianus vor sich gehabt. War es aber ein derartiges rechtwissenschaftlich-statistisches Hülfsbuch für Verwaltungsbeamte des römischen Kaiserreiches, welches dem genannten Schreiber sicherlich nicht später als im VII., vielleicht schon im VI. S. als Quelle diente[189]), dann dürfen wir auch nicht viel Anderes als Jurisprudenz darin suchen; dann müssen wir sehr froh sein, dass nebenbei auch feldmesserisches Material von demselben Schreiber copirt wurde, mag es in jenem officiellen Werke enthalten gewesen, oder aus besonderen Büchern durch ihn entnommen sein; dann dürfen wir vor allen Dingen es mit den einzelnen Namen nicht allzu streng nehmen, welche einzelnen Stücken vorgesetzt sind. Frontinus, Hyginus, Balbus u. s. w. in der Ueberschrift als Verfasser eines Stückes im Arcerianus angegeben beweisen uns nur, dass der Schreiber überhaupt aus Werken jener Verfasser Einzelnes geschöpft hat, beweisen uns, dass die so erhaltenen Stellen damals, als sie geschrieben wurden, also beiläufig im VI. S., schon lange existirten. Im Uebrigen enthalten wir uns jedes persönlichen

Urtheils darüber, in wie weit eine Verschiebung von Ueberschriften und Bruchstücken sich rechtfertigen lassen mag. Wir behandeln nur um irgend eine Rangfolge zu wahren jedes Stück des Arcerianus unter dem Namen des Verfassers, dem es in jener Handschrift zugewiesen ist. Aber auch von dieser Beschränkung absehend, können wir Einiges mit grösster Bestimmtheit dem Frontinus zusprechen, darin Lachmann folgend, der es verstanden hat, aus dem wässerigen Erläuterungen eines „Aermlichsten von allen Erdensöhnen", eines gewissen Agennius Urbicus, die echten Brocken des Frontinus herauszufischen, welche das unvergleichbar Beste jenes Commentars bilden. Eine jener zweifellosen Stellen ist es, in welchen Frontinus erklärt, er habe sein Werk in zwei Bücher abgetheilt, deren erstes dem vorbereitenden Unterrichte des Feldmessers selbst dienen sollte, während das andere sich über die Feldmesskunst verbreite[190]). Ein Bruchstück über die Begrenzungen, allerdings von Hultsch grösstentheils dem Frontinus abgesprochen[191]), dürfte, wenn es echt sein sollte, dem zweiten Buche angehört haben.

In ihm finden wir neben historisch-etymologischen Bemerkungen, welche weiter oben ihre Verwerthung gefunden haben, namentlich eine Stelle, deren Gleichartigkeit mit Vorschriften Heron's bereits von Venturi bemerkt worden ist[192]). Das Grundstück soll, wo immer seine Lage es gestattet, gradlinig ausgemessen werden. Zwischen rechtwinklich sich treffenden Linien soll das geschlossene Feld enthalten sein. Die Ueberschüsse, welche durch die thatsächliche Umgrenzung hervortreten, sollen mit ihrer Ausfussung hinzugefügt werden. Man muss um das ganze Feld herumgehen, an allen Eckpunkten Signale einstecken, welche von den abgesteckten Hauptgeraden aus rechtwinklig bestimmt werden, und diese Hauptgeraden bilden ein Rechteck. Das ist etwa der Sinn der wörtlich nicht ganz leicht zu übersetzenden Vorschriften, wobei wir bitten, uns das Wort „Ausfussung" möglicherweise eine Neubildung für Podismus, Ausmessung nach Fussen, zu Gute zu halten. Wer kann in diesen Regeln den Schüler der §§. 23 und 24 der heronischen Dioptrik verkennen?

Nicht mit ebensolcher Bestimmtheit können wir für eine andere, dem Frontinus zugeschriebene feldmesserische Ausführung auf ein heronisches Muster verweisen, können aber doch auch wieder nicht umhin, die Aufmerksamkeit unserer Leser neben der sogenannten *cultellatio*[193]) auf die Zirkelmessung[49]) in § 8 der Dioptrik zu lenken.

Hyginus[194]) darf nicht verwechselt werden mit einem in der römischen Literaturgeschichte gleichfalls bekannten Freigelassenen des Augustus und einem gleichaltrigen, vielleicht mit dem Ebengenannten zusammenfallenden Verfasser einer Astronomie von demselben Namen. Der Feldmesser Hyginus, dessen persönliche Verhältnisse uns im Uebrigen durchaus unbekannt sind, lebte unter Trajan und schrieb ein grösseres feldmesserisches Werk wahrscheinlich im Jahre 103, im Zwischenraume zwischen den beiden dacischen Kriegen [195]). Ausserdem verfasste mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit derselbe Schriftsteller ein Buch über die Befestigung von Lagern. Schon oben haben wir aus diesem letzteren Buche eine Stelle von historisch-etymologischem Werthe zu benutzen Gelegenheit gehabt[144]), welcher andere aus dem Hauptwerke des Hyginus, insbesondere aus dem *De limitibus* oder *De limitibus constituendis* überschriebenen Theile desselben, zur Seite stehen[145]). Gegenwärtig, wo wir es mit dem Nachweise heronischer Spuren bei Römern zu thun haben, müssen wir die uns verbliebenen, dem Hyginus zugeschriebenen Bruchstücke in dieser Beziehung absuchen. In erster Linie denken wir gewiss an jene beiden Methoden, welche mit Hülfe von zwei, beziehungsweise von drei Schattenbeobachtungen die Mittagslinie finden lehren. An Mollweide uns anschliessend[133]), haben wir die Ueberzeugung ausgesprochen, nicht Hyginus sei der Erfinder dieser Methoden, noch seien sie überhaupt italischen Ursprunges. Sie werden sicherlich ebendaher stammen, woher alles Geometrische bei den Römern stammt, welches wirklich diesen Namen zu führen verdient. Dürfen wir indessen der alexandrinischen Heimath ziemlich gewiss sein, so ist der Wunsch, den eigentlichen Urheber der Methoden zu erkennen, bisher als nicht erfüllt zu bezeichnen. Heron hat in seiner Dioptrik, dem einzigen Orte, wo allenfalls solche Methoden einen Platz

finden konnten, nichts Aehnliches. Ptolemäus, der als ein halbes Jahrhundert nach Hyginus lebend zwar nicht dessen Quelle sein könnte, aber doch mit Hyginus aus demselben älteren Schriftsteller zu schöpfen nicht verhindert war, giebt keine Anweisung die Mittagslinie zu suchen, sondern nennt nur Astrolabien und Skiotheren als Mittel zu diesem Zwecke, ohne im Uebrigen Erfinder oder Methoden zu erwähnen[196]. So tappen wir durchaus im Dunkeln und wagen kaum als Frage es aufzuwerfen, ob hier vielleicht ein Verfahren des Hipparch, des Vaters der theoretischen Astronomie aus der Mitte des II. vorchristlichen Jahrhunderts auf fremdem Boden fortgelebt haben sollte?

Auf Heron dagegen verweisen mit aller Bestimmtheit zwei Stellen, von welchen zu reden ist. Die eine Stelle ist nur sehr kurz und behandelt die Absteckung eines Grundstückes in viel knapperer Weise als die entsprechende Stelle des Frontiums, von der wir gesprochen haben. Trotzdem dürfte hier die Abhängigkeit von §§ 23 und 24 der Dioptrik noch zweifelloser sein, wie aus der im Codex Arcerianus beigefügten Zeichnung (Figur 15) hervorgeht, deren Verwandtschaft mit der Figur des Heron (Figur 7) auf der Hand liegt[197], und welche dem Verständnisse der Leser zu Hülfe kommen soll. Die Vergleichung, die wir anstellen, ist übrigens keineswegs neu, sondern bereits Eigenthum von Venturi, der nicht minder auch die andere Stelle vollständig richtig zur ersten Methode des § 10 der Dioptrik in Beziehung setzte und dadurch im Stande war, Text und Figur von den Fehlern zu reinigen, welche beide in den Handschriften entstellen. Da dieser Text den Herausgebern der römischen Feldmesser unbekannt geblieben ist, so theilen wir ihn hier im ganzen Wortlaute um so mehr mit, als wir aus der Aufgabe selbst eine Schlussfolgerung zu ziehen haben[198]. Wir schicken voraus, dass es sich um die Absteckung einer Parallellinie (*linea ordinata*) zu einer sichtbaren aber entfernten Geraden handelt, wie in § 10 der Dioptrik, dessen Auszug nebst zugehöriger Figur 5 wir zu vergleichen bitten (Figur 16). „Sei also *ABCD* der Grundriss der sichtbaren Punkte. Wir wollen von der zwischen *B* und *D* zuerst abgesteckten Linie aus das Signal

A einsehen. Von B aus wird das Groma eine kurze Strecke BE weit getragen, worauf man senkrecht von E aus einige Grenzpflöcke in der Richtung EG absteckt. Und wieder trägt man das Groma um ein Geringes weiter nach F und visirt von da aus das Signal A ein, so dass der Punkt G auf der von F in der Richtung nach A gezogenen Furche zu stecken kommt. Die jeweiligen Längenzahlen bemerken wir uns. Wie EF sich zu EG verhält, so werden wir FB behandeln, um zu BA zu gelangen, und diese ist die Länge der sichtbaren Entfernung zwischen B, A. In derselben Weise (etwa mit Hülfe von MNO) verschaffen wir uns die andere sichtbare Entfernung DC. Das Stück, um welches CD länger als AB ausfällt, bezeichnen wir mit Hülfe des Signals H und stecken von ihm aus eine gerade Verbindungslinie bis nach B ab. Diese wird der AC parallel sein." Wir dächten, es könne keinem unbefangenen Leser beikommen, Zweifel darein zu setzen, dass wer so schrieb, mochte er Hyginus heissen oder sonst ein römischer Feldmesser vor dem VI. S. sein, im Besitz der geometrischen Proportionenlehre war[199]).

Balbus[194]) war ziemlich genau ein Zeitgenosse des Hyginus, mit welchem er auch die Eigenschaft theilt, nicht der Erste seines Namens zu sein, welchen die Geschichte der exacten Wissenschaften zu verzeichnen hat. Wir wissen schon, dass zur augusteischen Zeit ein Balbus der Feldmesser kartographisch thätig war, wenn auch Kennzeichen seiner Wirksamkeit uns nicht erhalten sind. Der lange zeitliche Zwischenraum überhebt uns der Nothwendigkeit noch besonders hervorzuheben, dass es ein ganz anderer Balbus gewesen sein muss, der den Kaiser Trajan auf seinem dacischen Feldzuge begleitete und nach errungenem Siege, also gleichfalls um 103, oder, wenn der zweite Feldzug gemeint war, spätestens 117 nach Hause zurückkehrend[200]), eine feldmesserische Schrift an einen Celsus richtete, welcher selbst uns jedenfalls nicht genau bekannt ist, aber den Worten des Balbus gemäss eine erste Autorität des Ingenieurfaches gewesen sein muss[201]). Diese Schrift führte den Titel *Expositio et ratio omnium formarum*, auf welchen, wie auf die ganze Schrift, sogleich noch zurückzukommen ist. Man hat

bis vor wenigen Jahren als fest gesichert angenommen, dass derselbe Balbus auch der Verfasser einer anderen Schrift sei, welche *De asse* betitelt über die Brüche handelt und somit freilich nur eine nebensächliche Beziehung zu feldmesserischen Arbeiten besitzt, sofern es bei Berechnung von Flächenmassen vielfach auf eine praktische Handhabung der Brüche ankommen kann. Erst 1863 hat Christ bei Veröffentlichung seiner wichtigen Untersuchung über das Rechenbuch des Victorius und den Commentar zu demselben von Abbo von Fleury ganz nebenbei den Beweis geliefert, dass jene Sicherheit auf sehr schwacher Grundlage beruhe, dass im Gegentheil das Buch *De asse* aus unwiderlegbaren Gründen nicht bloss später als 117, später als 146, sogar später als 222 abgefasst worden sein muss, wozu Hultsch die weitere Ergänzung lieferte [202]), die Abfassungszeit müsse begrenzt werden zwischen den Kaisern Alexander Severus (222—230) und Constantinus (306—337).

Die einzige Schrift unseres Balbus bleibt also jene Darstellung der *formae*. Im Allgemeinen bedeutet dieses Wort[203]) bei Technikern dasselbe, wie unser Grundriss, Plan, wofür z. B. auch eine Parallelstelle aus der Wasserbauschrift des Frontinus beigezogen werden kann, in welcher der Verfasser sagt, er habe dafür gesorgt, dass Pläne der Wasserleitungen angefertigt würden. Ja auch Balbus selbst gebraucht das Wort *forma* unbedenklich für Plan oder Grundriss. Eine Uebersetzung des von Balbus gewählten Titels mit den Worten „Ueber das Planzeichnen“ scheint daher auf den ersten Blick gerechtfertigt, und dieses ist auch etwa die Meinung, welche Mommsen zu seiner Uebersetzung „Darstellung und Theorie sämmtlicher Grundrisse“ geführt haben muss. Wichtiger als ein gelegentlicher Gebrauch eines mehrdeutigen Wortes scheint uns aber die Definition, welche der Verfasser ausdrücklich giebt, und diese lässt es nicht zu, das Wort *forma* hier anders als durch Figur zu übersetzen. Wir würden Scheu getragen haben, auf diese Auseinandersetzung philologischer Natur uns einzulassen, wäre die Sache nicht dadurch auch für die Geschichte der Mathematik von Wichtigkeit, dass der Titel Darstellung und Theorie der Figuren, dem ganzen Werke des Balbus einen be-

zeichnenden Stempel aufdrückt, dass der Beweis damit geliefert ist, dass wir in jenem Werke entschieden mehr eine Geometrie, als eine Anleitung zum Zeichnen, und sei es auch geodätischer Plane, zu suchen haben. Dass uns aber die freudige Ueberraschung, welche uns, nachdem wir unsere Ansicht vollständig gebildet hatten, zu Theil ward, als wir bei Hultsch, an einer uns früher entgangenen Stelle, dieselbe Auffassung wieder fanden, nur Muth machen konnte, auch unsere Gründe dafür auszusprechen, bedarf nicht der Erwähnung. Das Werk des Balbus, vollständig zu unserer Kenntniss gebracht, würde uns jedes Vermuthen, jedes Errathen auf dem Gebiete historischer Forschung über den Zustand der Mathematik in Rom in den ersten Jahrhunderten neuer Zeitrechnung erspart haben. Aber so gut sollte es uns nicht werden. Der Codex Arcerianus enthält kaum einige Zeilen unter dem Namen des Balbus, und was andere erheblich jüngere Handschriften unter demselben Namen bringen, ist auch nicht genügend, uns über alle Abschnitte jenes Werkes klaren Aufschluss zu gewähren. Ob damit die Vermuthung Mommsen's an Gewicht gewinnt[204]), es möchte ein im Codex Arcerianus dem Nipsus zugeschriebenes Kapitel ursprünglich dem Balbus angehört haben? Hultsch ist geneigt sich dieser Ansicht anzuschliessen[205]), und wir wollen es durchaus nicht als einen Beweis gegentheiliger Ueberzeugung aufgefasst wissen, wenn wir jenes Kapitel, nur um unserem S. 96 ausgesprochenen Grundsatze getreu zu bleiben, unter Nipsus behandeln.

Was uns nun mit Balbus als Autornamen vorliegt, ist durchaus heronisch. Heronisch ist das Vorkommen des Wortes „Figuren" in der Ueberschrift, wenn wir wenigstens den in zwei heronischen Handschriften mitgetheilten Titelworten vertrauen[206]). Heronisch ist es, mit Masstabellen überhaupt zu beginnen, und heronisch ist besonders die von Balbus mitgetheilte Tabelle. Heronisch ist es, Definitionen in grösserer Zahl zu geben, mögen nun die Definitionen selbst Heron oder Euklid oder irgend einem Dritten angehören, welche aus den heronischen Sammlungen bekannt, bei Balbus zum Theile in wörtlicher Uebersetzung erscheinen[207]). Heronischer Geometrie, wie wir das Gesammtwerk jenes Mannes uns

gedacht haben, ist es keineswegs zuwider, geometrische Aufgaben zu stellen und zu lösen. Ebensowenig können die beiden Constructionen rechter Winkel, die eine, welche von den Vulgärmaassen 6, 8, 10 Gebrauch macht, die andere, welche den Winkel im Halbkreise zu Hülfe zieht[208]), als nicht heronisch bezeichnet werden. Die Erstere ist ja nur Anwendung des pythagoräischen Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5, welches auch Vitruvius kennt[174]) in verdoppelten Längen, die zweite, wenn auch ausdrücklich Euklid zugeschrieben, kann sehr wohl in einer heronischen Sammlung vorhanden gewesen sein. Heronisch sind die in den Widmungsworten an Celsus genannten feldmesserischen Operationen, welcher der Kriegsingenieur fähig sein musste. Die Stelle heisst mit Einfügung der entsprechenden Paragraphen von Heron's Dioptrik wie folgt[205]): „Sobald als wir das feindliche Land betraten, erforderten die Operationen unseres Kaisers sofort methodische Vermessungen. Es waren in einem bestimmten Zwischenraume zwei Parallelen herzustellen für die lang hingestreckten hohen Wälle, welche die Operationsbasis sichern sollten; hier kam uns Deine Erfindung zu statten, nach welcher wir die Parallelen durch Visiren für jeden einzelnen Abschnitt der Verschanzungsarbeit unter Anwendung der Dioptra zogen (§ 10 und § 22). Ja, und was die Situationspläne für Brücken betrifft, so konnten wir die Breite der Flüsse, auch wenn es dem Feinde einfiel zu plündern, von dem diesseitigen Ufer aus bestimmen (§ 9). dnU dann, dass wir die Höhe der zu erstürmenden Berge kannten, auch das lehrte uns die herrliche Methode des Triangulirens (§ 12 und § 13)". Wir wollen nicht unterlassen, Venturi die Ehre zu wahren auch hier bereits einen Zusammenhang zwischen Balbus und § 12 der Dioptrik erkannt zu haben[209]), damals ein wirkliches Verdienst, bevor die Stelle des Balbus durch eine geistreiche Conjectur Hultsch's verständlich geworden war[210]). Von einem Nachahmer Heron's war nur Eines noch zu erwarten, was bisher bei Balbus nicht nachgewiesen werden konnte, während es grade den Haupttheil seines Werkes ausmachen musste: Berechnungen von Flächen und überhaupt rechnende Geometrie. Grund mehr um die Ueberzeugung zu hegen, dass

dieser Theil auch nicht ganz spurlos untergegangen sein kann, dass er vielleicht, um wiederholt jener Vermuthung Mommsen's zu gedenken[201]), unter dem Namen des Schriftstellers stückweise erhalten ist, von dem wir jetzt zu reden haben.

Marcus Junius Nipsus kann nicht wohl als Römer gedacht werden. Ob er aber wirklich, wie der Beiname und der Geschlechtsname zu verrathen scheinen, griechischer Freigelassener eines edlen Römers aus dem Hause der Junier war, wer möchte darüber bei Mangel jeglichen Materials entscheiden wollen? So viel scheint sicher, dass Nipsus oder ähnlich Klingendes in römischen Inschriften sich nicht auffinden lässt, dass Nypsios aus Neapolis bei Plutarch und Diodor vorkommt, dass des Nipsus Latinität jede andere Heimath als Rom wahrscheinlicher macht. Unsicher ist auch die Zeit, zu welcher Nipsus lebte. Martin begnügt sich, seine Epoche als unangebbar zu bezeichnen. Teuffel setzt ihn ohne Angabe irgend eines bestimmenden Grundes etwa in das Jahr 400. Hase endlich bemerkt, seit den Antoninen sei die Sitte vielfältiger Namen eingerissen, so dass von Heliogabalus an ein Mann meistens vier, fünf, auch sechs Namen nach einander geführt habe. In Marcus Junius Nipsus sei dagegen nur Pränomen, Nomen und Cognomen zu erkennen, wie in alter Zeit, der Träger dieses Namens dürfe desshalb nicht unter das II. S. n. Chr. herabgesetzt werden. Ein weiterer Unterstützungsgrund zu Hase's Ansicht wurde uns gesprächsweise von einem feinen Kenner römischer Alterthümer angedeutet, dass nämlich Junier später als das II. S. überhaupt kaum mehr vorhanden seien. Gleichviel, welche dieser Meinungen, deren Abwägung Sachkundigere unternehmen mögen[211]), die Oberhand behält; gleichviel, ob das Bruchstück rechnender Geometrie, das jetzt behandelt werden soll, in Balbus seinen eigentlichen noch früheren Urheber habe oder nicht, für uns wäre es schon bedeutsam, die Erhaltung heronischer Wissenschaft zu erhärten, wenn es auch nur überhaupt als jenseits des VI. S. entstanden gedacht werden müsste, und diese Nothwendigkeit bringt das Alter der Handschrift schon mit sich. Da dieses Podismus genannte Stück[212]) eingehend noch nie behandelt worden ist, so müssen wir hier einige Ausführlichkeit uns gestatten.

Gleich der in der Ausgabe Römischer Feldmesser nach wenigen Zeilen Definitionen gedruckten Vereinigung einiger stereometrischen Aufgaben müssen wir vorsichtig uns nahen, weil sie nicht dem Arcerianus, sondern einem Erfurter, den Schriftzügen nach dem XI. S. entstammenden Codex angehört. Es handelt sich um den Inhalt von Piscinen, von Fässern, von Kalköfen, und bei dem Fasse wird die Methode gelehrt, drei Durchmesser unten, in der Mitte und oben zu messen, deren Summe zu bilden und den dritten Theil der Summe quadrirt mit $\frac{11}{14}$ und der Höhe zu vervielfachen. Bestimmte Zahlen, welche den Vergleichungen oftmals als gute Handhabe dienen, kommen nicht vor. Es dürfte ziemlich müssig sein, der bestimmten Verwandtschaft mit dieser oder jener Stelle der heronischen Sammlungen nachspüren zu wollen. Jene Methoden der Vereinigung von drei Messungen zu einem arithmetischen Mittel, der Aufsuchung ferner eines Mittelkreises bei säulenartigen Körpern finden sich, wie noch später bei Patrikius erörtert werden soll. Vielleicht gestattet dieser Umstand den Verfasser der genannten Aufgaben etwa in das Jahr 400 zu setzen, und wäre die Autorschaft von Nipsus bewiesen, so würde damit der Zweifel, wann dieser gelebt haben mag, zu Gunsten der spätesten Annahme sich lösen. Wir können uns allerdings nicht entschliessen, grosses Gewicht auf diese Aufgaben zu legen, weil sie unter allen Umständen nicht am richtigen Platze stehen. Stereometrischen Aufgaben vor planimetrischen begegneten wir noch nirgend.

Wir wenden uns zu den nun folgenden, sämmtlich der Ebene angehörenden Rechnungsaufgaben, welche wir zur bequemeren Berufung auf dieselben mit Nummern versehen.

1. Ausrechnung des stumpfwinkligen Dreiecks von der Basis 9, der grösseren Hypotenuse 17, der kleineren Hypotenuse 10. Der Verfasser frägt nach der Ueberragung, *eiectura*, d. h. der Verlängerung der Basis, an deren Ende die Senkrechte aus der Spitze eintrifft. Die Zahlen, die meisten Namen, die angewandten Formeln decken sich vollständig mit dem 32. Kap. von Heron's Geometrie[78]). Nur zwei Unähnlichkeiten finden statt, die eine im Namen der kleineren Hypotenuse[213]), die andere darin, dass der

römische Schriftsteller die Zahlen nur zu Anfang nennt, dann aber eine Wortformel kennen lehrt, worin beiläufig ein gewaltiger Fortschritt etwa gegen Columella sich offenbart. Heron giebt bei dieser Aufgabe Wortformel und Ausrechnung des bestimmten Beispiels gemischt.

2. Die zweite Aufgabe ist eine der unschätzbarsten der ganzen Geometrie vermöge der vielseitigen Folgerungen, welche sie nach rückwärts wie nach vorwärts zulässt. Wir geben daher ihre wörtliche Uebersetzung, wobei nur das in eckige Klammern Eingeschlossene ergänzt ist: „In einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Podismus 25 Fuss, die Fläche 150 Fuss, Kathete und Basis gesondert anzugeben. Suche es so. Ich multiplicire immer die Hypotenuse mit sich, giebt 625 Fuss. Zu dieser Summe füge 4 Flächen, welche 600 Fuss machen. Beides zusammen werden 1225 Fuss. Ich nehme davon die Seite, welche 35 Fuss wird. Dann um den Unterschied der zwei Geraden zu finden, nimm die Zahl der Hypotenuse in sich selbst, giebt 625 Fuss. Davon ziehe ich 4 Flächen ab, und es bleiben 25 Fuss. [Ich nehme davon die Seite], macht 5. Sie ist der Unterschied. Ich füge ihn zu den beiden verbundenen, d. h. zu 35. Es werden 40 Fuss. Davon nehme ich immer die Hälfte. Sie wird 20 Fuss. Das ist die Basis des Dreiecks. Nehme ich von den 20 den Unterschied weg, d. h. 5 Fuss, so bleiben 15 Fuss. Das ist die Kathete desselben Dreiecks.“ Zuerst ist hier auf einen Schreibfehler aufmerksam zu machen. Das Wort Podismus steht da, wo wir Hypotenuse zu lesen erwarten, wohl dadurch entstanden, dass es ursprünglich Podismus der Hypotenuse hiess, worauf das wichtigere Wort irrthümlich wegblieb. Die Begründung dieser Vermuthung wird noch in diesem Abschnitte erfolgen, während der Fehler selbst im folgenden Abschnitte uns wesentliche Dienste leisten soll. Einen Zusammenhang mit Heron giebt unmittelbar das gewählte Dreieck, welches auch dort sich findet, und die Wörter für rechtwinklig und Fläche, welche gradezu griechisch nur mit lateinischen Buchstaben geschrieben, sich den Namen der Hypotenuse, der Basis, der Kathete in dieser Beziehung vollständig anschliessen[214]). Aber die angewandte Methode ist das Wichtigste,

welche jedenfalls eine der Niederschrift des lateinischen Textes vorhergehende Kenntniss des pythagoräischen Lehrsatzes[215]) und der Auflösung quadratischer Gleichungen beweist, ebenso wie auch die damals vorhandene Kenntniss von der Auffindbarkeit zweier Grössen aus ihrer Summe und Differenz. Heisst h die Hypotenuse, Δ die Fläche, c_1 und c_2 die beiden Katheten, so besagt ja die Auflösung des Nipsus nichts anderes als

$$c_1 + c_2 = \sqrt{h^2 + 4\Delta},\ c_1 - c_2 = \sqrt{h^2 - 4\Delta},$$

und diese Formeln kann nur gefunden haben, wer da wusste, dass $h^2 = c_1^2 + c_2^2$, dass $4\Delta = 2c_1c_2$, dass auch

$$(c_1 \pm c_2)^2 = c_1^2 \pm 2c_1c_2 + c_2^2.$$

Woher stammt diese Aufgabe, woher ihre Lösung? Bestimmt nachweisen lässt sich der Ursprung nicht, aber wer könnte zweifelhaft sein, dass er alexandrinisch, dass er heronisch war? Und wenn die Gemeinschaft der beiden Katheten, welche hier zunächst gesucht wird, nahe verwandt ist der Gemeinschaft von Durchmesser, Kreisumfang und Kreisinhalt, wenn Nichts einer quadratischen Gleichung ähnlicher sieht als eine andere quadratische Gleichung, so steigt jetzt auch wieder die Wahrscheinlichkeit, dass jene auf S. 59—60 dem Heron zugewiesene Auflösung einer auf einer unreinen quadratischen Gleichung beruhenden Aufgabe in der That keine Beimengung aus späterer Zeit ist.

3. Die Ausrechnung des spitzwinkligen Dreiecks von den Seiten 13, 14, 15, wobei 14 als Basis auftritt, welche durch die aus der Spitze gefällte Senkrechte in Abschnitte zerlegt wird, ist gradezu übersetzt aus dem 24. Kapitel der heronischen Geometrie[216]), aber durch eine sonderbare Figur entstellt (Figur 17).

4. Auffindung rationaler rechtwinkliger Dreiecke ausgehend von einer ungeraden und von einer geraden Zahl. Wir kennen schon längst diese Methoden, wir haben sie im 12. und 13. Kapitel der heronischen Geometrie[76]) wiedergefunden, wir begegnen ihnen hier an anderen Zahlen und etwas weniger ausgeführt. Von 3 aus wird durch Quadrirung 9, durch Subtraction der Einheit 8, durch Halbirung 4, welches die Basis ist, aus der durch Hinzufügung der Ein-

heit die Hypothenuse 5 wird; aber dass die Anfangszahl 3 eine Kathete ist, wird nicht gesagt. Von 6 aus wird durch Halbirung 3, durch Quadrirung 9, durch Subtraction der Einheit die Basis 8; aber dass die Anfangszahl 6 die andere Kathete sei, wird ebensowenig gesagt, wie dass die 9 um die Einheit vermehrt die Hypothenuse 10 gebe.

5. Die heronische Flächenformel des Dreiecks angewandt auf das Dreieck 6, 8, 10. Die Formel fanden wir in den heronischen Sammlungen mehrfach[78]), aber stets an anderen Zahlen; die grösste Verwandtschaft bietet das Dreieck 3, 4, 5 mit halb so grossen Seiten, an welchem im Liber Geeponicus das gleiche Verfahren geübt wird. Jedenfalls aber steht durch diese Aufgabe die Erfindung der heronischen Formel vor der Zeit des Nipsus fest, worauf auch Martin mit dem Bedauern, diese Zeit nicht bestimmen zu können, hingewiesen hat[211]).

6. Als letzte Aufgabe verlangt der Verfasser die Berechnung der Senkrechten aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse und die Abschnitte der Hypotenuse selbst, also die Auflösung einer Aufgabe, welcher im 12. Kap. der heronischen Geometrie §§ 3 und 4 gewidmet sind[217]). Bei dieser Aufgabe sind durch den Schreiber arge Verstümmelungen vorgekommen, welche auf die Richtigkeit der Rechnung verderblich gewirkt haben. Nipsus hat zwar vollständig begriffen, dass jene Senkrechte gefunden wird, indem man das Product der beiden Katheten durch die Hypotenuse dividirt, allein in den Zahlen herrscht eine solche Verwirrung, dass es unmöglich erscheint auch nur zu ermitteln, von welchen Dreiecksseiten ausgegangen ist. Die Abschnitte der Hypotenuse, welche zur Aufklärung beitragen könnten, fehlen gänzlich, wiewohl offenbar im Original-Nipsus auch diese berechnet waren. Der erhaltene Text bricht nämlich plötzlich mitten im Satze bei den Worten „um die einzelnen Abschnitte zu suchen“ (*ut queramus singulas precisuras*) ab, auffallend genug, da es nicht am Ende des Blattes ist, wo die Annahme einer Lücke die Sache erklären würde. Nein, mitten auf dem Blatte reisst der Faden entzwei, und mit naiver Unbefangenheit setzt der Schreiber darunter: Schluss des Buches des M. Junius Nipsus!

So widerwärtig es ist, dass von dieser lateinischen Bearbeitung heronischer Geometrie nicht mehr unversehrt auf uns gekommen ist, dass wir nicht unmittelbar ein Urtheil uns bilden können, wie viel noch aus dem griechischen Werke römisches Verständniss und damit Uebernahme in römische Gelehrsamkeit gefunden hatte, dazu reicht auch der geringe, hier im Auszuge vorgetragene Theil zu, ihn so zu charakterisiren, wie wir es eben gethan haben. Was bei Gelegenheit der Columella'schen Aufgaben behauptet werden durfte, gilt auch hier: alle Aufgaben weisen mit nachweisbarer, oder wenn auch einmal nicht zu controlirender, doch nicht zu verleugnender Nothwendigkeit auf Heron von Alexandrien zurück, wahrscheinlich auf das „andere Buch“ desselben, in welchem wie andere Zahlen, auch mitunter andere Aufgaben gestanden haben mögen, als in der Auflage der Geometrie, deren Reste wir griechisch kennen.

In der Ausgabe römischer Feldmesser gehen dem Podismus zwei andere Kapitel voraus, welche den Namen desselben Verfassers M. Junius Nipsus theilen. Dass beide sich mit Aufgaben der heronischen Dioptrik und zwar des § 9 und des § 25 dieser Schrift beschäftigen, hat schon Venturi aus den Ueberschriften erkannt und darnach den Text zu reinigen gewusst[218]). Er hat auch die Figur zur ersten Aufgabe hergestellt, nämlich zur Aufgabe, die Breite eines Flusses von einem Ufer aus zu messen. Wir lassen die Uebersetzung des Wortlautes folgen (Figur 18): „Kommt bei Absteckungen, die bei der Ausmessung eines Gebietes vorzunehmen sind, ein Fluss vor, dessen Breite zu bemessen ist, so mache es so. Die Gerade AC, welche auf den Fluss stösst, beuge in B und wohin Du sie gewendet hast, dahin lege den rechten Winkel ABE. Dann trage das Groma von der auf den Fluss stossenden Geraden ABC auf die eben abgesteckte Gerade BE hinüber. Trage es bis nach E, visire die eben abgesteckte BE und vollziehe die Drehung BEF nach rechts. Dann gehe über den halben Weg EB von dem rechten Winkel bei E nach dem rechten Winkel bei B, theile den Weg in zwei gleiche Theile ED, DB und befestige ein Signal senkrecht in D. Dann stelle das Groma in D auf, wo die beiden Theile ED, DB, welche Du ab-

getheilt hast, abgetheilt sind. Wenn das Groma aufgestellt ist und dessen Richtung mit der Linie auf dem Boden genau übereinstimmt, so dass der herabreichende Bleisenkel auf das Signal bei *D* eintrifft, alsdann setze das Groma in Bewegung, bis Du ein auf dem jenseitigen Ufer vorhandenes Signal *H* einschneidest. Hast Du sorgfältig eingeschnitten, so gehe auf die andere Seite des Apparates hinüber, und während das Groma unverändert bleibt, stecke die Gerade *DF* ab. Wo sich die frühere Senkrechte *EF* mit der nun abgesteckten *DF* schneidet, dahin stecke ein Signal *F* und gehe messend über *FE* von dem Signale *F* nach dem rechten Winkel *FEB*. Weil aber die in *D* halbirte Linie *BE* zwei Dreiecke *DBH*, *DFE* zeigt und weil die Kathete *BD* der Kathete *DE* gleich ist, wird auch die Basis *BH* der Basis *EF* gleich sein. Welche Zahl also der Basis *EF* des Dreiecks, über welche Du gegangen bist, zukommt, dieselbe Zahl ist die der Linie *BH* des anderen Dreiecks *BDH*, welche auf den Fluss stösst. Von dieser Basis, über welche Du gegangen, ziehe die Längenzahl ab, welche Du vom rechten Winkel bis zum Flusse zurückgelegt hast. Was übrig bleibt, ist die Breite des Flusses.“

In der That eine schwerfällige Lösung, welche die nicht unmittelbar zugängliche Länge mittelst congruenter Dreiecke auf das Feld zeichnet, damit sie dort einer directen Messung unterworfen werden könne, statt Methoden der Proportionalität anzuwenden[219]). Hier ist, das zeigt ein Blick auf § 9 der Dioptrik, der uns bekannte Heron gewiss nicht die Quelle des mühseligen Verfahrens gewesen.

Um so wahrscheinlicher ist die unmittelbare Anlehnung an § 25 der Dioptrik in der anderen Aufgabe der Wiederherstellung verwischter Grenzen auf dem Felde. Der grosse Umfang des betreffenden Kapitels des Nipsus hält uns davon ab, eine Uebersetzung hier einzuschalten und damit die vollständige Vergleichung mit unserem Auszuge aus der Dioptrik zu ermöglichen. Wir überlassen dieses Geschäft dem darnach begierigen Leser, welchem es mit Hülfe von Venturi's und Vincent's vorbereitenden Bemerkungen ohne allzugrosse Schwierigkeit gelingen muss. Wir finden uns zu dieser Enthaltsamkeit um so mehr veranlasst, als wenig-

stens ein Theil des Abgedruckten nicht durch den Arcerianus in seinem Alter gesichert erst in dem schon erwähnten Erfurter Codex[212]) sich findet.

Dürfen wir hier zwei Schriftsteller einschalten, welche vielleicht der Zeit nach hier ihre Stellung finden, vorausgesetzt, dass Nipsus nicht diesseits des Jahres 400 gelebt hat, welche aber doch nicht grade hier gesucht werden mögen? Sextus Julius Africanus[220]) lebte unter Kaiser Alexander Severus, bis zu dessen Regierungsantritt etwa die Chronographie dieses palestinensisch-christlichen Autors hinabreicht. Er schrieb in griechischer Sprache, und ob er nur jemals in Rom war, scheint nirgend erwähnt. Grund genug, seinen Namen hier nicht zu vermissen, wenn wir ihn wegliessen. Und doch glauben wir mehr als nur auf Entschuldigung Anspruch machen zu dürfen, wenn wir seiner gedenken. Wir berufen uns auf die Zusammengehörigkeit des grossen römischen Reiches, welche technische Arbeiten, denen ein einigermassen amtlicher Charakter innewohnt, auch in entlegenen Provinzen der Hauptsache nach wohl gleichartig vollziehen liess. Wir berufen uns auf die Kenntniss von römischem Felddienste, welche Julius Africanus durch Schilderung der bekannten und viel erwähnten Fackeltelegraphie[221]) an den Tag legt. Wir berufen uns auf den sachlichen Inhalt desjenigen Stückes seiner Collectaneen, dem wir einen Platz einzuräumen beabsichtigen. Wir berufen uns endlich darauf, dass worüber wir berichten auch in historisch-mathematischen Kreisen bisher ziemlich unbekannt geblieben ist, und dass eine Hindeutung darauf gerechtfertigt ist, wenn selbst der hinweisende Finger zur unpassenden Stunde sich erheben sollte, weil eine passendere nicht gegeben ist. Im XXXI. Kapitel der Kesten[222]) lehrt Julius Africanus praktische Kriegsgeometrie, insbesondere die Auffindung der Breite eines Flusses, dessen jenseitiges Ufer vom Feinde besetzt sei, und die Auffindung der Höhe der Mauern einer belagerten Stadt, um darnach im Voraus die Grösse der herzustellenden Kriegsmaschinen, Thürme u. s. w. berechnen zu können. Grundlage des ganzen Verfahrens ist ein geometrischer Satz, dessen Beweis, wie der Verfasser sagt, nur von dem I. Buche der Euklidischen Elemente ab-

hängt, der Satz nämlich, dass sämmtliche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks halbirt erscheinen, wenn aus der Mitte einer Kathete parallel zur anderen eine Gerade nach der Hypotenuse, und aus deren Durchschnittspunkte wieder eine neue Parallele zur ersten Kathete bis zum Durchschnitte mit der zweiten gezogen wird (Figur 19). Sei AB die erste Kathete und ausser den vorgeschriebenen DE, EZ noch die Hülfslinie DZ gezogen. $AD = DB$, $DB = EZ$ als Parallele zwischen Parallelen, folglich auch $AD \# EZ$, und somit treten in der Figur zwei Parallelogramme auf, $GEDZ$, $DBEZ$, vermöge deren $DE = GZ = BZ$ und $DZ = EG$, während (aus dem in dem Beweise nicht genannten Parallelogramme $ADZE$ folgend) auch $DZ = AE$ ist. Von diesem Satze aus wird die Breite eines Flusses gemessen. Liegt A am feindlichen Ufer (Figur 20), während EE die diesseitige Uferlinie bezeichnet, so stellt man die Dioptra in J auf, weiter vom Flusse entfernt als der Fluss breit ist, und visirt sowohl (senkrecht zur Flusslinie EE, was aber nicht ausdrücklich gesagt, sondern nur aus der Figur zu entnehmen ist) nach A, als rechtwinklig zu dieser ersten Linie nach U. Von J begiebt man sich messend nach U, so dass dabei der Punkt K in der Mitte von JU gewonnen wird. Steckt man nun von U aus die Richtung UA, von K aus $KC \parallel JA$ und endlich $CR \parallel JU$ ab, so ist AJ doppelt so gross, AR genau gleichgross mit JR, und lässt nach Abziehung von FR die gesuchte AF übrig. So verschieden diese Methode von der des Nipsus ist, so ähnelt sie ihr doch darin, dass die genaue Länge der verlangten Linie auf dem Felde gemessen, nicht errechnet wird. Letzteres leistet eine zweite sich an die erste anschliessende Methode (Figur 21). Man geht längs dem Flusse in der gemessenen Linie BG und nimmt einen massiven rechten Winkel von augenscheinlich ziemlich bedeutender Grösse mit, auf dessen einem Schenkel in E eine Signalstange senkrecht zur Ebene des rechten Winkels befestigt ist. Wird nun G so gewählt, dass jene Signalstange bei E mit dem Objecte A und dem Standpunkte G in einer Geraden liegt, so ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $BG : GD = AB : ED$, mithin AB gefunden. Dieselbe Figur, so beschliesst Julius Afrikanus dieses interessante Kapitel, dient die Höhe einer

Mauer von Weiten zu messen. Die Dioptra wird dazu in D als DE aufgestellt und ihr Lineal in die Neigung EA gebracht, wo A einen Punkt des oberen Mauerrandes bedeutet. Die rückwärtsige Verlängerung dieser Richtung EA nach G lehrt GD neben dem bekannten DE und neben dem nach der vorigen Aufgabe ermittelten GB finden und nunist $GD : DE = GB : BA$. Hier erkennen wir wieder den Schüler heronischer Lehren. Die §§. 8, 9, 12 der Dioptrik sind unverkennbar in der Nachbildung, unverkennbar auch die Benutzung ähnlicher Dreiecke.

Daneben scheint uns auch in der zweiten Methode eine Angabe vorhanden, welche das Verständniss der Messung der Flussbreite bei Nipsus fördert. Julius Africanus bediente sich unzweifelhaft eines massiven rechten Winkels. Text und Figur vereinigen sich, dies zu bestätigen. Auch in unserer Uebersetzung des Nipsus haben wir verschiedentlich von rechten Winkeln gesprochen. Das lateinische Wort heisst *tetrans* und wird gemeiniglich als rechtwinkliger Kreuzungspunkt zweier Strassen verstanden, eine Erklärung, welche wir selbst oben mitgetheilt haben (S. 75). Ebensowohl könnte aber Tetrans irgend ein massives Viertel eines selbstverständlichen Ganzen sein, ein Quadrant, um ein neues Wort ähnlicher Bedeutung ihm gegenüberzustellen, und zwar der Quadrant eines Quadrates, also ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck, welches, wie wir noch sehen werden, in der That zu feldmesserischen Zwecken von Römern angewandt wurde. Nur durch die Gleichschenklichkeit würde sich dieser Quadrant von dem Dreiecke des Julius Africanus unterschieden haben. Seine Anwendung bei Nipsus würde entweder darin bestanden haben, dass man ihn an den betreffenden Punkten in die Erde einstampfte, um den rechten Winkel authentisch festzuhalten, oder aber, da diese Annahme dazu zwingen würde, den Feldmesser mehrere Quadranten mit sich führen zu lassen, darin, dass man längs der Seiten des Quadranten Furchen in die Erde zog, welche auch beim Weiterschaffen des Apparates dessen Gestalt bewahrten.

Mit ähnlichen Ansprüchen wie Sextus Julius Africanus gehört vielleicht auch Patrikius hierher, von welchem Einiges in den heronischen Sammlungen herrühren soll.

Wer er war[20]), ob etwa der Lykier dieses Namens, der Vater des Proklus um 412, oder Patrikius von Lydien, welcher 374 der Grausamkeit des Kaisers Valens zum Opfer fiel, steht eben so wenig fest, wie seine wirklichen Ansprüche auf Erfindungen nicht übermässigen Werthes, welche an zwei Stellen der heronischen Sammlungen, im 104. Kap. der Geometrie und im 22. Kap. des I. Buches der Stereometrie, ihm beigelegt werden. Die erstgenannte Methode, ihre Beliebtheit dadurch einigermassen erweisend, dass sie auch in einem anderen Buche, in den Mensurae, ohne Namen des Erfinders vorgetragen wird, besteht in der Vorschrift bei grösserer Länge l eines Grundstückes die Breiten b_1, b_2, b_n, an n verschiedenen Stellen zu messen, um die Fläche als das Product von l in $\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$ zu erhalten[223]). Die andere begrifflich sehr nahestehende Methode findet den Körperinhalt einer als Kegelstumpf von wenig verschiedener unterer und oberer Grundfläche zulaufenden Säule durch das Product der Höhe in einen Mittelkreis, dessen Durchmesser das arithmetische Mittel des unteren und oberen Durchmessers ist[224]). Den Werth einer Annäherung haben beide an sich offenbar falsche Formeln nur dann, wenn das einemal die Breiten, das anderemal die begrenzenden Kreisflächen nur geringe Verschiedenheiten zeigen. Bei den Geometern der römischen Hauptstadt aber scheint von dieser Bedingung keine Rede zu sein; wenigstens ist weder die stereometrische Stelle des Podismus darnach angelegt, noch nehmen andere Beispiele, zu denen wir noch gelangen, darauf Rücksicht. Uns hat die ganze Frage nur dadurch einige Bedeutung, als, wie wir schon bei der Nipsusstelle anführten, das Vorkommen der Methode, wenn Patrikius sie wirklich im IV. S. erfand, den Benutzenden in eine spätere Zeit hinabrückt. Ob aber des Patrikius Autorschaft feststeht? Wir scheuen uns auf eine einzige Stelle hin, deren Einschieber selbst durchaus unbekannt ist, die Behauptung zu wagen. So viel ist sicher, dass Aehnliches auch an anderen Stellen der heronischen Stereometrie vorkommt[225]), und dem Charakter der Methode nach sehr wohl altegyptisches Eigenthum sein könnte[226]).

Haben wir uns somit erlaubt einen Halbberechtigten, einen vielleicht Garnichtberechtigten hier eine Heimath anzuweisen, so verlangen der oder die Verfasser des im Codex Arcerianus unmittelbar nach dem abgebrochenen Podismus des M. Junius Nipsus folgenden ziemlich umfangreichen Stückes ohne Zweifel ausführliche Behandlung. Es ist jenem Stücke eigenthümlich ergangen. Die Handschriften desselben müssen, wenn auch nicht in grosser Zahl bekannt, doch mehrfach vorhanden gewesen sein. Aus einer Handschrift hatte wohl im XVI. S. Carl Lange eine Copie genommen. Diese Copie, verbunden mit einem Codex der alten Cistergienser-Abtei Dunen, welche seit 1138 bei Furnes im westlichen Flandern gegründet worden, dienten als Grundlage einer Druckausgabe, welche Pater Andreas Schott 1616 in Antwerpen veranstaltete[227]). Den Text des Arcerianus lernte Hase kennen, während jener Codex am Anfange unseres Jahrhunderts einen unfreiwilligen Aufenthalt in Paris genommen hatte, und machte ihn zum Gegenstande einer sehr hübsch geschriebenen Abhandlung[228]), in welcher freilich nur ein Theil des Textes zur Besprechung und zur correcten Veröffentlichung gelangte. Trotzdem hat Ebert noch 15 Jahre nach dem Erscheinen von Hase's Untersuchungen in seiner auch sonst nicht ganz zuverlässigen Beschreibung des Codex Arcerianus jenes Stück als noch nicht herausgegeben bezeichnet[229]), trotzdem findet sich der Name des Verfassers in den neuesten Werken über römische Literaturgeschichte nicht angegeben. Fügen wir noch hinzu, dass es auch dem Vorsteher der Wolfenbüttler Bibliothek nicht gegenwärtig gewesen zu sein scheint, dass der Gegenstand unserer Nachfrage schon längst im Drucke erschienen, so wird uns darum ein lächelndes Achselzucken des Lesers wahrscheinlich doch nicht dafür erspart werden, dass wir, um dieses geometrische Fragment abzuschreiben, eine Reise nach Wolfenbüttel unternahmen. War es doch ein freilich mit Aerger gepaartes Lachen, dessen wir selbst uns nicht enthalten konnten, als wir wenige Tage nach unserer Rückkehr fast zufällig den Abdruck von 1812 in die Hand bekamen. Dennoch bereuen wir es nachträglich nicht, eine eigenhändige Abschrift genommen zu haben, da die bis-

herigen Drucke immer noch kleine, aber wichtige Lücken und massenhaft sinnentstellende Unrichtigkeiten in der Satzbildung enthalten. Dieser Umstand, verbunden mit der verhältnissmässigen Seltenheit auch des Abdruckes von 1812 mag es rechtfertigen, wenn wir in den Anmerkungen den getreuen Wortlaut veröffentlichen[230]), bei welchem wir nur eine Eintheilung in Paragraphen zum Zwecke besserer Verweisung uns gestatten, und selbstverständlich auch die im Manuscripte ungeschieden aufeinander folgenden Majuskeln zu den nach unserer Meinung richtigen Wörtern und Sätzen vereinigen. Im Uebrigen werden wir einzelne leichte Verbesserungen zwar hier im deutschen Texte, aber nicht im Abdrucke des Originales uns erlauben. Die Figuren stimmen der Hauptsache nach gleichfalls mit denen des Arcerianus überein, wenn sie auch nicht durchgezeichnet sind, so dass auf die genaue Form der angeschriebenen Buchstaben und Zahlen so wenig wie auf die einzelnen Längenabmessungen Gewicht gelegt werden darf. Im Allgemeinen mag noch hervorgehoben werden, dass die Figuren des Arcerianus eine gewisse Eleganz verrathen, welche nur durch grosse Uebung im Zeichnen erworben werden konnte, während doch der Schreiber nach den haarsträubenden Fehlern in den Zahlen zu urtheilen, welche er sich häufig zu Schulden kommen liess, von dem eigentlichen Inhalte des von ihm Abgeschriebenen blutwenig verstanden haben kann. Doch gehen wir von dem Schreiber, den wir künftig als den letzten Abschreiber bezeichnen wollen, zu dem Verfasser oder zu den Verfassern über.

Zwei Namen werden am Anfange und am Schlusse der Schrift genannt, am Anfange Aprofiditus und Betrubus Rufus der Architekt, am Schlusse Aprofoditus und Bertrubus Rufus der Architekt, also in beiden Namen trotz des zweifellos einheitlichen Abschreibers doppelte Lesarten, eine Bürgschaft dafür, dass keiner von beiden zu trauen ist. Beiden ist gleichmässig der Stempel der Verderbtheit aufgedrückt. Weder ein Aprofoditus noch ein Aprofiditus kommt irgendwo bei Schriftstellern oder in Inschriften vor, so weit die heutigen Hülfsmittel hinreichen sich darüber zu vergewissern. Man ist von philologischer

Seite ziemlich einig darin, diese Wortform für eine Entstellung von Epaphroditus zu halten. Wenn auch von einem Agrimensor Epaphroditus nirgend eine Spur aufzufinden ist, so kommt der Name doch sonst in grosser Häufigkeit in Griechenland wie in Rom vor, wovon mannigfache Beispiele bei Benseler[211]) zusammengestellt sind, und so wollen wir bis auf Weiteres dieser Meinung der Entscheidungsberechtigsten uns anschliessen. Auch Betrubus wie Bertrubus sind unbekannt, auch hier liegt es nahe, in Vitruvius den richtigen Namen zu vermuthen, wenn auch hierfür die Uebereinstimmung nicht so allgemein sein dürfte, wegen der grösseren Auswahl der Möglichkeiten, zwischen denen man sich zu entscheiden hat[231]). Bewusst oder unbewusst haben wohl die Meisten bei dieser Wahl sich durch den Stand des als Baumeister Bezeichneten ein wenig für den Architektennamen bestimmen lassen.

Dass nun Epaphroditus und Vitruvius Rufus, wie die beiden Schriftsteller von nun an bei uns heissen mögen, jenes Buch gemeinsam verfasst haben sollten, ist wohl kaum anzunehmen. So alt ist die Sitte sich zugleich auf dem Titel nennender Doppelverfasser nicht. Wir möchten weit eher vermuthen, der Compilator, welcher nach Mommsen[188]) um 450 die erste Zusammenstellung feldmesserischer Pandekten übernahm, oder ein späterer Schreiber, keinenfalls aber der mathematisch durchaus unwissende letzte Abschreiber des Codex Arcerianus habe die Bücher von drei Agrimensoren, von Nipsus, von Epaphroditus, von Vitruvius Rufus, vor sich gehabt. Mit einem Auszuge aus dem Ersten beginnend, und vielleicht aus mangelndem Verständniss schliesslich abbrechend, wenn wir nicht lieber annehmen, von diesem Auszuge seien grössere Abschnitte vor der letzten Abschrift verloren gegangen, gelangte er zu den beiden Anderen und fasste sich nun noch kürzer, beide in einem Auszuge vereinigend. Wollte man in's Blaue hinein Vermuthungen anstellen, so würde man zwei gradezu entgegengesetzte Meinungen verfechten können. Man könnte sagen, Epaphroditus und Vitruvius Rufus sahen sich so ähnlich, wie etwa zwei Planimetrien aus den dreissiger Jahren, welche ehrenwerthe aber seltene Ausnahmen vorbehalten kaum etwas

anderes als Plünderungen desselben Lehrbuches von Legendre zu sein pflegten, und desshalb genügte ein Auszug für Beide. Man könnte aber auch sagen, Epaphroditus und Vitruvius Rufus, der Eine ein geometrischer, der Andere ein arithmetischer Schriftsteller, konnten nicht verwechselt werden. Man wusste doch aus dem Inhalte der Sätze, was dem Einen, was dem Anderen angehörte, und desshalb genügte ein Auszug für Beide. Diesen Hypothesen liessen sich vielleicht ohne grossen Aufwand an Scharfsinn noch andere zur Seite stellen, sämmtlich der Vertheidigung fähig, und darum sämmtlich gegenseitig zum Angriffe verwendbar, sämmtlich gleich unhaltbar. Begnügen wir uns mit der einen Thatsache, dass hier ein Gemeinsames und zwar muthmasslich ein gemeinsames Excerpt vorliegt und benutzen hinfort Epaphroditus als Sammelname der in diesem Stücke enthaltenen Sätze, ohne damit zu behaupten, er habe an diesem oder jenem Satze mehr Anrecht als Vitruvius Rufus, dessen Name man vielmehr immer alternativ dazu genannt denken muss.

Wir kommen zu der weiteren Frage, wann wohl Epaphroditus und Vitruvius Rufus der Architekt gelebt haben? Hase hat aus dem Namen des Epaphroditus gewiss mit Recht auf griechische Abkunft geschlossen; er müsse Freigelassener oder Sklavenkind und in der Kaiserzeit öffentlicher Feldmesser gewesen sein. Ob grade unter Trajan, wie Hase als entfernte Möglichkeit hinzufügt[232]), sei dahingestellt. Was den Zweitgenannten betrifft, so sträubt sich vor Allem unser stylistisches Gefühl gegen eine Identification des Vitruvius Rufus mit dem Verfasser der 10 Bücher über Architektur, wenngleich umgekehrt auch bestimmte sprachliche Gründe dafür geltend gemacht werden können[233]). So unkenntlich, sollten wir denken, wird selbst in dem dürrsten Auszuge nicht die Eigenart eines Schriftstellers, dass alle charakteristischen Merkmale verloren gingen, dass nicht ein kleines nicht immer zu dem behandelten Gegenstande passendes Geschichtchen, nicht eine Nennung alter Erfinder oder dergleichen übrig geblieben wäre, welche das schriftstellerische Erkennungszeichen jenes Werkes aus augusteischer Zeit bilden. Ob aber Vitruvius und Epaphroditus als Zeit-

genossen betrachtet werden sollen, ob nicht, das schwebt für uns völlig in der Luft. Fassen wir unsere Meinung zusammen, so ergiebt sich für jeden der beiden Verfasser als unsichere obere Zeitgrenze, dass sie keinenfalls jenseits des alexandrinischen Krieges Cäsar's, wahrscheinlich nicht jenseits Trajan gelebt haben; die untere Zeitgrenze bildet das Datum der Auszüge, also etwa 450, oder allerspätestens das der letzten Abschrift, etwa das VI. S.

Epaphroditus in der oben angekündigten Sammelbedeutung dieses Namens füllt heute noch 42 Spalten des Codex Arcerianus. Sein Inhalt lässt sich in zwei Gruppen betrachten, welche allerdings nicht vollständig räumlich getrennt auftreten. Die Paragraphe 1 bis 14, 16, 25 bis 34 und 39 bis 40 gehören entschieden der Geometrie an; die Paragraphe 15, 17 bis 24, 35 bis 38 ebenso entschieden der Arithmetik. Jener erstere Theil ist von unseren Vorgängern durchaus richtig abgedruckt. Der zweite Theil, unverstanden von den Herausgebern, dürfte keinem Leser ihres Druckes verständlich sein. Er ist zudem lückenhaft durch das Fehlen einzelner Sätze da und dort, insbesondere aber durch das Fehlen der Paragraphe 35 und 38, deren grosse hervorragende Wichtigkeit uns noch beschäftigen wird.

Wenden wir uns zuerst zu dem geometrischen Theile. Wir erkennen ohne Mühe die Quelle, aus welcher seine Wissenschaft entsprungen ist, und bedürfen, wenn wir die Quelle genannt haben, vor unseren Lesern wohl keines genauen Durchseihens jedes einzelnen Tropfens. Heronisch ist die Einleitung der Auflösungen durch die Buchstaben *S. Q.*, deren Gebrauch und Bedeutung[214]) dem „mache es so" des Alexandriners genau entspricht. Heronisch ist in §. 2 die Benennung der Scheitellinie[88]) eines Trapezes durch *vertex* oder *chorauste*, eine unglückliche Latinisirung eines griechischen Wortes, welche uns hier zuerst begegnet[233]). Heronisch ist die Uebung Wortformel und Zahlenbeispiel zu verbinden. Heronisch sind 4 Aufgaben selbst in den zu Grunde gelegten Zahlenwerthen, während 12 andere Aufgaben nur dem Sinne und der angewandten Methode nach erkenntlich die frühere Muthmassung bestärken, es sei das „andere Buch" gewesen, in welchem heronische Geo-

metrie nach Rom kam. Rechnet man ferner noch 6 Paragraphen ab, welche Definitionen und Maassverhältnisse in sich schliessen[231]), so bleiben von den 27 geometrischen Paragraphen nur noch 5, für welche bis jetzt das griechische Original fehlt, zur näheren Besprechung übrig.

§. 7 fragt nach der Zahl der Bäume, welche auf einem rechteckigen Acker von den Abmessungen 120 und 70 Fuss in 5füssigen Zwischenräumen gepflanzt werden können. Die Aufgabe beantwortet sich, indem 120 und 70 durch 5 getheilt, die Quotienten 24 und 14 aber je um eine Einheit vergrössert werden, bevor man sie zu dem der gesuchten Baumzahl entsprechenden Producte 25 mal 15 vereinigt. Als Begründung wird auf die Eckbäume hingewiesen, welche nach beiden Abmessungen in Betracht kommen und keinen Zwischenraum mehr hinter sich haben.

§. 8 und §. 9 messen die Oberfläche von Bergen nach einer Näherungsmethode, welche derjenigen nahe verwandt ist, über die als eine muthmasslich uralte bei Gelegenheit des Patrikius berichtet wurde. In §. 8 wird das arithmetische Mittel von drei, in §. 9 das von zwei Kreisperipherien als durchschnittlicher Umfang gewählt, der das eine Mal mit der Höhe, das andere Mal mit der halben Summe zweier an Abhängen von verschiedener Steilheit zu messenden Höhen vervielfacht wird. In der zweiten Aufgabe wird die Fläche zu einer ganzen Zahl von Jucharten abgerundet angegeben, während sie eigentlich um 6400 Quadratfuss, d. h. um $\frac{2}{9}$ Juchart grösser als 22 Juchart herauskommt. In der ersten Aufgabe dagegen ist die Rechnung genau geführt und in Worten richtig angegeben, wenn auch die Bruchzeichen, welche wir dem Arcerianus durchaus entsprechend geformt haben, zu den Worten nicht passen wollen, einer von den vielen Beweisen dafür, dass der letzte Abschreiber, der dem Gegenstande völlig fremd gegenüberstand, in seiner mathematischen Unwissenheit unmöglich als der Anfertiger der Excerpte gedacht werden kann, die also älter sein müssen.

§. 30 lehrt den Durchmesser des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises als den Rest kennen, welcher bei Abziehung der Hypotenuse von der Summe der

beiden Katheten übrig bleibt. Wir heben besonders hervor, dass in der zugehörigen Zeichnung (Figur 49) an die eine Kathete vermuthlich durch den Abschreiber eine falsche Zahl kam. Nicht 8, 12, 15, sondern 9, 12, 15 sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, und alsdann auch in der That $9 + 12 - 15 = 6$ der Durchmesser des Innenkreises. Der Fehler kann sehr wohl dadurch entstanden sein, dass im Originale *GIII* stand, welches als *VIII* copirt wurde, eine Gattung von Fehlern, welche der aufmerksame Leser einigemal wiederfinden wird, ohne dass wir besonders auf die bestimmten Stellen hindeuten.

§. 39 ist eine in mehrfacher Beziehung nicht unwichtige Vorschrift zur Höhenmessung ohne Benutzung des Schattens. Wichtig ist uns nämlich hier das Vorkommen einer solchen Messmethode im Anschlusse an rechnende Geometrie; wichtig die miteingeschlossene Bestätigung, dass Höhenmessungen durch den Schatten[70]), sagen wir kurzweg thaletische Höhenmessungen, die Regel bildeten; wichtig endlich die Methode selbst. Wirf dich, so heisst etwa die Vorschrift, platt auf die Erde[235]), und begieb dich nach rückwärts bis du den Gipfel siehst. Aus der Lage, von welcher aus du den Gipfel am Himmel gesehen hast, erhebe dich, und miss über dem Erdboden hin bis zu dem Baume, oder was der Gegenstand der Messung sei. Die Entfernung ist gleich der Höhe. Wir können diesen Worten einen Sinn nur dann beilegen, wenn wir uns den Feldmesser mit einem gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecke oder irgend einem diesem entsprechenden Apparate bewaffnet denken, über dessen Hypotenuse er visirt. Die Vereinigung von Baumgipfel und Himmel, d. h. das Eintreten des Baumgipfels in die von jeder Lage aus am Himmel endigende Sehlinie des Beobachters, tritt dann allerdings in dem Momente ein, in welchem die Entfernung des Beobachters vom Fusse des Baumes der Höhe des Baumes gleich ist Kann aber unsere Erklärung der Zustimmung so sicher sein, als wir es hoffen, dann stimmt dieser Paragraph, wie wir in Erinnerung bringen dürfen, zu der Annahme eines solchen massiven Quadranten, dessen Nipsus sich bedienen mochte, wie vorher unter Sextus Julius Afrikanus erörtert wurde.

Boten uns diese Sätze auch mehrfach Interessantes, werden wir auch in diesem wie im folgenden Abschnitte noch mehrfach auf sie zurückkommen müssen, so ist doch kein Grund zur Ueberraschung in ihnen gegeben. Ganz anders aber verhält es sich mit den Paragraphen, welche, wie wir sagten, den arithmetischen Theil ausmachen. Oder sollte es viele Kenner der seitherigen Untersuchungen über Geschichte der Mathematik geben, welche die Erwartung hegen, bei Epaphroditus folgende Dinge zu finden: 1) die Formel zur Darstellung der Polygonalzahlen aus ihrer Seite, 2) die Formel zur Darstellung der Seite aus der Polygonalzahl, 3) eine überaus elegante Formel zur Auffindung der Pyramidalzahlen aus den zugehörigen Polygonalzahlen und ihren Seiten, 4) die Formel zur Summirung von Kubikzahlen?

Polygonalzahl, und zwar m-Eckzahl von der Seite r, wofür wir uns des Zeichens p_m^r bedienen wollen, nennt man die Summe einer arithmetischen Reihe aus r-Gliedern, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz $m-2$ ist, wodurch $m=3$ als niedrigster Werth von m geboten erscheint, wenn die Reihe eine wachsende sein soll. So ist zunächst die Dreieckszahl von der Seite r oder

$$p_3^r = 1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{r\,(r+1)}{2},$$

die Viereckszahl von der Seite r oder

$$p_4^r = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2r - 1) = r^2,$$

und allgemein

$$p_m^r = 1 + (1 + (m-2)) + (1 + 2\,(m-2)) + \ldots$$
$$+ (1 + (r-1)\,(m-2)) = \frac{(m-2)\,r^2 - (m-4)\,r}{2}.$$

Diese Summirung ist allerdings den Alten, wie längst bekannt, ein Leichtes gewesen, und wenn die daraus sich ergebende Formel für p_m^r bisher nicht nachweisbar gewesen ist, so ist doch keinem Zweifel unterworfen, dass sie für einen griechischen Arithmetiker ableitbar war[236]).

Wir haben an mehreren Beispielen es wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Alexandriner schon ein Jahrhundert vor Christi Geburt es verstanden, unreine quadratische Gleichungen aufzulösen. Jedenfalls waren sie in Be-

sitz dieser Kunst, als sie die zweite Aufgabe lösten, und aus der erst angegebenen Gleichung die Folgerung zogen:

$$r = \frac{\sqrt{8(m-2)\,p_m^r + (m-4)^2} + (m-4)}{2(m-2)}.$$

Eine Frage noch verwickelterer Natur ist die nach der Pyramidalzahl P_m^r. Unter der *m*eckigen Pyramidalzahl von der Seite r versteht man die Summe der r ersten m-Eckszahlen oder

$$P_m^r = p_m^1 + p_m^2 + p_m^3 + \ldots + p_m^r.$$

Substituiren wir die einzelnen Werthe der Polygonalzahlen, so erscheint die doppelte Summirung

$$P_m^r = \frac{m-2}{2}(1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2) - \frac{m-4}{2}(1+2+3+\ldots+r)$$

nothwendig. Setzen wir nun ebenso wie

$$1+2+3+\ldots+r = \frac{r(r+1)}{2}$$

auch

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

als bekannt voraus, was allerdings vor dieser Veröffentlichung des Epaphroditus als unbegründete Anmassung hätte zurückgewiesen werden müssen, so folgt:

$$P_m^r = \frac{m-2}{2}\cdot\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} - \frac{m-4}{2}\cdot\frac{r(r+1)}{2}$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[\frac{m-2}{2}\cdot r(2r+1) - \frac{m-4}{2}\cdot 3r\right]$$

$$= \frac{r+1}{6}\left[\frac{m-2}{2}\cdot 2r^2 - \frac{m-4}{2}\cdot 2r + r\right]$$

oder endlich $P_m^r = \frac{(2p_m^r + r)(r+1)}{6}$, und das ist die merkwürdig schöne Formel des Epaphroditus, eine Formel, welche durchaus verloren gegangen zu sein scheint. Uns wenigstens ist es bei allerdings nicht sehr weit ausgedehntem Nachsuchen nicht gelungen, diese Formel in einem neueren Buche aufzufinden.

Theoretisch um einen weiteren Schritt höher ist nun noch die Summirung der Kubikzahlen zu setzen. Epaphroditus weiss, dass

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+r^3 = (p_3^r)^2 = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2.$$

Wie er zu dieser Formel gelangte, glauben wir nachweisen zu können. Mindestens seit Nikomachos von Gerasa wussten die Griechen, seit Appulejus von Madaura unter den Antoninen dessen Arithmetik übersetzt hatte[237]) auch die Römer von dem Zusammenhange, welcher zwischen Kubikzahlen und ungraden Zahlen herrscht. Nikomachus lehrt[238]), die erste Kubikzahl sei gleich der ersten ungraden Zahl $1^3 = 1$, die zweite gleich der Summe der zwei darauffolgenden ungraden Zahlen $2^3 = 3 + 5$, die dritte gleich der Summe der darauf wieder folgenden drei ungraden Zahlen $3^3 = 7 + 9 + 11$, und so fort in's Unendliche. Zerlegen wir nun die ersten r-Kubikzahlen nach diesem Gesetze, so gleichen sie der Summe von lauter auf einander folgenden, mit der Einheit beginnenden ungraden Zahlen, deren Anzahl $1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2}$. Die $\frac{r(r+1)}{2}$te ungrade Zahl heisst aber $2\,\frac{r(r+1)}{2} - 1$ oder $r^2 + r - 1$, und somit ist

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + r^3 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (r^2 + r - 1)$$
$$= \frac{1 + r^2 + r - 1}{2} \cdot \frac{r(r+1)}{2} = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2.$$

So etwa mögen die Schlüsse in der Quelle des Epaphroditus gelautet haben. Gemeiniglich wird es als Beleg der Selbstständigkeit der indischen Mathematik hervorgehoben, dass Brahmegupta im Jahre 628 diese Formel lehren konnte[239]). Sollte nicht grade ein neuer Beleg für die Abhängigkeit der indischen Mathematik von den Alexandrinern darin gefunden werden können? Jedenfalls verdient diese wichtige Frage eine wiederholte Prüfung unter Benutzung des neuen Materials, welches theilweise auch in diesem Buche an verschiedenen Stellen zerstreut sich vorfindet. Ein geistvoller Geschichtsschreiber, der indessen von einer ziemlich weitgehenden Vorliebe für die Inder nicht freizusprechen ist, hat in einem bei einem arabischen Schriftsteller aufbewahrten Beweise für die Summenformeln der Kubikzahlen entschieden indisches Gepräge erkennen wollen[240]). Wir begehren nicht dagegen Widerspruch zu erheben, aber auch mit unserer Wiederherstellung eines griechischen Beweises hoffen wir nicht ganz unglücklich gewesen zu sein, abgesehen

davon, dass die Heimath eines bestimmten Beweises eines Satzes nur feststellt, dass man ebendort den Satz selbst kannte, nicht zugleich woher man ihn kannte.

Wir haben bisher nur Behauptungen über den arithmetischen Inhalt des Epaphroditus ausgesprochen. Unsere Leser, die nicht gleich uns sich abgequält haben, die richtige Satzbildung zu vollziehen, um damit zum Verständnisse der Schrift zu gelangen, die also auch nicht sofort erkennen möchten, was in jedem einzelnen Paragraphen steht, die überdies an Schreibfehlern Anstoss nehmen könnten, welche zu irgend einer Zeit, gleichviel wann, in den Text hineingeriethen, sind berechtigt, mehr von uns zu fordern. Berücksichtigen wir, dass bei $m = 7$ die früheren allgemeinen Formeln in

$$p_7^r = \frac{5r^2 - 3r}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{40 p_7^r + 9} + 3}{10}, \quad P_7^r = \frac{(2 p_7^r + r)(r + 1)}{6}$$

übergehen, und übersetzen nun einmal §. 19.

„Jedes Siebeneck ist von gleichen Seiten eingeschlossen, deren eine ich mit sich selbst und dann noch mit 5 vervielfache. Die 3fache Seite ziehe ich ab. Ich nehme die Hälfte. Ich nenne es ein Siebeneck. Ist ein Siebeneck gegeben (Figur 38), dessen Seiten 10 Fuss lang sind, so frage ich, wie viele Fusse seine Fläche beträgt. Mache es so! Ich vervielfache eine Seite mit sich, giebt 100. Das nehme ich 5mal, giebt 500. Davon ziehe ich die 3fache Seite ab, das ist 30. Bleibt 470. Nach genommener Hälfte 235. So viele Fusse misst die Fläche des Siebenecks. Um die Methode der Ausmessung des Siebenecks offenkundig zu finden, sei also ein Siebeneck gegeben, dessen Fläche 235 Fuss in sich vereinigt. Ich suche das Maass einer Seite. Mache es so! Ich nehme immer 40 mal 235, giebt 9400. Dazu addire ich immer 9, giebt 9409 und suche die Quadratwurzel dieser Summe, giebt 97. Dazu addire ich immer 3, giebt 100. Nach Theilung durch 10 giebt es 10. So viel Fusse enthalten alle Seiten des Siebenecks. Von der Einheit bis zum Siebenecke von 10. Die gegebene Zahl im Siebeneck beträgt 235. Das nehme ich doppelt, giebt 470. Ich addire die Zahl selbst, giebt 480. Ich vervielfache mit der um 1 vergrösserten Zahl und theile durch 6, giebt 940.

Will man die Seiten dazu, so ist die Dreieckszahl der gegebenen Zahl 55; zu 880 hinzuaddirt, giebt 935. Will man die Seiten weniger, so ziehe ich es ab, giebt 825."

Der Vergleich unserer Uebersetzung mit dem lateinischen Texte zeigt, dass hier ein Wort *aera*, seltener *era*, einmal durch einen Schreibfehler auch *area* lautend neben *area* = Fläche vorkommt, welches wir deutsch durch „Seite" übertragen haben. Wir hielten diese Uebersetzung, welche an sämmtlichen §§. 17 bis 24 geprüft werden mag, für die richtigste, selbst für richtiger als die Erklärung, welche ein römischer Grammatiker dafür gab. Nonius Marcellus, welcher Appulejus benutzt hat, von Priscian citirt wird, also zwischen den Jahren 200 und 250 über alterthümliche Wörter schrieb, lässt nämlich *aera* als weiblich „Zahlzeichen" bedeuten[241]), was wenigstens bei Epaphroditus nicht gut passen will. Es lohnt immerhin eine kleine Conjektur zur Vertheidigung unserer Uebersetzung vorzuschlagen. Wie, wenn im Originale griechisch *ΠΛΕΥΡΑ* stand, der erste Buchstabe sich etwa verwischt hatte und daraus das lateinische *AERA* copirt wurde, wohl in Erinnerung an jenes alterthümliche Wort? Mögen Fachmänner entscheiden, wie weit sie mir beizustimmen vermögen. Die fernere Vergleichung des Textes zeigt uns einen Schreibfehler in der Ausrechnung der Pyramidalzahl. Sie sollte 880 heissen und heisst 940; dass aber nur ein Schreibfehler vorliegt, beweist die sich am Ende anschliessende Rechnung, in welcher mit der richtigen Zahl 880 Operationen vorgenommen werden. Was allerdings diese Schlusszeilen sagen wollen, das zu ermitteln waren wir nicht im Stande, und müssen der Hoffnung uns hingeben, es werde Anderen gelingen, hierin glücklicher zu sein als wir. So viel leuchtet auf den ersten Blick ein, dass es hier wie in den übrigen Paragraphen darauf ankommt, Summe und Differenz einer $m$eckigen Pyramidalzahl und der Dreieckszahl von gleicher Seite zu berechnen, aber welchen mathematischen Sinn man damit verband, ist uns unklar geblieben. Sollte man ein Analogon zu dem den Griechen bekannten Satze[242]) aufzusuchen beabsichtigt haben, dass die m-Eckszahl von der Seite r und die Dreieckszahl von der Seite $r-1$ zusammen die $m+1$-Eckszahl von der Seite r bilden? Im Uebrigen dient der

ganze Paragraph vom Siebeneck zur Bestätigung unserer vorausgeschickten Behauptungen in ihren drei ersten Theilen.

Eine Kenntniss der allgemeinen Formeln ist allerdings noch nicht erwiesen. Der specielle Fall des Siebenecks könnte speciell behandelt worden sein. Das wohl, aber ist es wahrscheinlich, dass alle speciellen Fälle, vom Dreieck anfangend bis zum Zwölfeck, einzeln ausgearbeitet worden sein sollen? In ganz alter Zeit war dieses der Weg, auf welchem die Wissenschaft fortschritt, aber seit Euklid, seit Archimed, seit Apollonius, seit Heron ging das Streben auf Allgemeinheit, wo immer sie zu erzielen war. Und wollte man diese Erwägung nicht gelten lassen, und wollen wir andrerseits nicht vorgreifend Gründe in Betracht ziehen, welche erst später zur Entwicklung kommen werden, so fragen wir weiter, was ist wahrscheinlicher, dass grade bei niedrigem Werthe von m bei der Einzelbetrachtung zwei in Rechenfehler ausartende Schreibfehler sich einschlichen, oder ist es nicht vielmehr wahrscheinlicher, dass es zwei Fehler mangelhafter Substitution waren? Wir denken dabei an das Fünfeck und an das Sechseck. Die richtigen Formeln sind hier

$$p_5^r = \frac{3r^2 - r}{2}, \; p_6^r = \frac{4r^2 - 2r}{2}$$

und bei $r = 10$ insbesondere $p_5^{10} = 145$, $p_5^{10} = 190$. Diese Zahlen kennt Epaphroditus, denn sie werden in §. 17 und §. 18 der Berechnung der Pyramidalzahlen zu Grunde gelegt, aber bei der Ausrechnung der Vieleckszahlen selbst finden sich Irrthümer. Beidemal sind die Subtractionen in Additionen verwandelt, also

$$p_5^r = \frac{3r^2 + r}{2}, \; p_6^r = \frac{4r^2 + 2r}{2}, \; p_5^{10} = 155, \; p_6^{10} = 210$$

gesetzt. Durch eigenthümlichen Zufall entgeht ihm dieser Fehler bei der Rückberechnung der Seite aus der Vieleckszahl, bei welcher er den gleichen Fehler begeht

$$r = \frac{\sqrt{24\,p_5^r + 1} - 1}{6} \text{ und } r = \frac{\sqrt{32\,p_6^r + 4} - 2}{8}$$

zu rechnen, also in beiden Zählern Subtractionen statt Additionen vorzunehmen — in der That ein merkwürdiger Zu-

fall, nur dadurch möglich, dass $\sqrt{24 p_5^r + 1}$ und $\sqrt{32 p_6^r + 4}$ hier rational ausfallen, möge man statt der Buchstaben die richtigen Zahlenwerthe 145, 190 oder die falschen 155, 210 einsetzen.

Wir sagten, Epaphroditus wende seine Formeln auf alle Vielecke vom Dreiecke bis zum Zwölfecke an. Die das Fünfeck bis zum Zwölfeck erörternden Paragraphe folgen sich unmittelbar in unserer Eintheilung als §. 17 bis §. 24. Das Dreieck ist in §. 15 vorausgeschickt und zwar ohne dass die Pyamidalzahl desselben berechnet wäre. Eine noch schärfere Ausnahmestellung nimmt die Quadratzahl ein, erst in §. 35 nachfolgend. Bei ihr fehlt die Berechnung des Quadrates aus der Seite, wenn wir sie nicht aus §. 5 ergänzend hierher beziehen wollen, wie die der Seite aus dem Quadrate, leicht begreiflich, denn welcher besonderen Darlegung hätte $r^2 = r \times r$ und $r = \sqrt{r^2}$ bedurft? Die entsprechende Pyramidalzahl dagegen, d. h. die Summe der r ersten Quadratzahlen ist in doppelter Weise berechnet. Vielleicht ein Anhaltspunkt für die früher angedeutete Berechnung der Pyramidalzahlen mit Benutzung der Formel für die Summe der Quadratzahlen kann darin gefunden werden, dass die der allgemeinen Formel entsprechende Methode $P_4^r = \frac{(2r^2 + r)(r + 1)}{6}$ erst an zweiter Stelle vorgetragen ist, an erster Stelle dagegen eine andere Berechnung gewählt ist, deren unmittelbarer Ursprung uns allerdings nicht ersichtlich ist, während sie mittelbar aus der allgemeinen Formel sich leicht ableitet. Epaphroditus rechnet nämlich zuerst $P_4^r = \left(\frac{r}{3} + \frac{1}{6}\right)(r + 1)\,r$. Allerdings blieb die Vorschrift r durch 3 zu theilen dem Abschreiber in der Feder stecken, allerdings lassen die Zeichen für $\frac{1}{3}$ wie für $\frac{1}{6}$ sehr Vieles zu wünschen übrig, aber der Sinn von §. 35 gestattet keine andere Deutung, und den Abschreiber des Ungeschicks zu beschuldigen haben wir, namentlich wo es um Brüche sich handelt, entschieden das Recht.

Dieselbe Ungeschicklichkeit legt der Abschreiber in §. 38 an den Tag „Nimm 10 mal $\frac{1}{4}$ giebt $2\frac{1}{2}$, wieder 10 mal

$2\frac{1}{2}$ giebt 25; dann 11 mal 25 giebt 275, und wieder 11 mal 275 giebt 3025. Das sind die Kubikzahlen von 1 bis 10.“ Der Sinn lässt es nicht zu anders zu lesen. Nur so stimmt das Ergebniss $r \cdot \frac{1}{4} \cdot r \cdot (r+1) \cdot (r+1)$ überein mit $(p_3^r)^2$ oder $\left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2$ als Summe von $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + r^3$, aber nur mit Hülfe des Sinnes lässt das Bruchzeichen sich als $\frac{1}{4}$ deuten, während der Abschreiber das Seinige gethan hat, das Geheimniss der Wissenschaft hinter schwer durchdringlicher Dornenhecke seit anderthalb Jahrtausenden verborgen zu halten. Grade an diesem wichtigen Paragraphen sind unsere Vorgänger schweigend vorübergegangen.

Wir haben eine letzte Frage zu erörtern, über welche wir unsere Meinung freilich in Zwischenbemerkungen schon laut werden liessen: Wem gehören die unter den Namen Epaphroditus und Vitruvius Rufus erhaltenen Aufgaben an? Natürlich keinem Römer. Die Stellung der Römer in der Geschichte der Mathematik, das wird nachgrade kaum des Hervorhebens mehr bedürfen, ist eine erhaltende, keine fördernde gewesen. Dass sie selbst nichts schufen ist allgemein anerkannt. Dass anderswo Verschollenes bei ihnen und durch sie sich erhielt, ist für manche Dinge — wir denken an das Rechnen auf Columnen, an die Apices, an die complementäre Division — noch immer bestritten: für den Inhalt des Codex Arcerianus wird auch der Zweifelsüchtigste seinen Widerspruch verstummen lassen müssen. Wenn aber, was Römer Mathematisches lehrten, nur von ihnen mit oder ohne Verständniss Aufbewahrtes ist, so haben wir keinerlei Auswahl für die Herkunft des so Aufbewahrten. Zur Zeit, in der die Römer mathematische Dinge sich aneigneten, waren es nur die Alexandriner unter den mit ihnen in nahe Berührung Tretenden, welche ihre Lehrer sein konnten, welche auch, wie wir ausführlicher zu zeigen suchten, ihre Lehrer waren. Alexandrinisch und insbesondere heronisch war die römische Feldmesswissenschaft. Alexandrinisch, nach unserer persönlichen Ansicht heronisch, war auch dieser arithmetische Theil, dessen ideelle Verwandtschaft mit von uns bei Heron theils nachgewiesenen,

theils als möglich erwähnten Kenntnissen nicht in Abrede gestellt werden wird, für welche auch in Heron's Vorbemerkungen zu den Elementen der Arithmetik[63]) oder in einer sich daran anfügenden wirklichen Arithmetik Platz genug war. Schrickt man freilich davor zurück noch im Jahrhundert vor Christus an solche Entwicklung der Algebra und Arithmetik zu glauben, so muss man zunächst an zwei Schriftsteller denken, deren Werke die Quelle des Epaphroditus sein möchten, die beide über Polygonalzahlen insbesondere schrieben: an Nikomachus von Gerasa und an Diophant von Alexandrien. Aber die Arithmetik des Nikomachus kennen wir in dreifacher Beglaubigung: im Urtexte, in der Uebersetzung des Boetius, in dem Commentare, welchen im IV. S. Jamblichus dazu verfasste. Nirgend, auch nicht in dem zuletzt genannten Commentare, finden wir die vier Formeln des Epaphroditus, sondern nur, wie wir gesehen haben, Material zu deren Entwicklung. Auch des Diophantos Schrift über Polygonalzahlen ist in unseren Händen, muthmasslich einige Jahrzehnte nach Jamblichus verfasst. Wir durchforschen sie vergebens nach den für uns wichtigen Sätzen. Will man darum die Quelle, aus welcher Epaphroditus ohne Verständniss schöpfte, erst nach Ablauf des IV. S. entspringen lassen? Will man der Latinität des Epaphroditus selbst ein noch späteres Datum zuweisen?

Aber ohne Verständniss hätte Epaphroditus abgeschrieben, beziehungsweise vielleicht übersetzt? Nach unserer Ueberzeugung ist dieses scharfe Wort durchaus berechtigt. Bei den Griechen waren die Sätze von den Polygonal- und Pyramidalzahlen das, als was wir sie bezeichneten: Theile der Arithmetik; dem Römer war dieser Unterschied, wenn er ihm je zum Bewusstsein kam, sehr bald abhanden gekommen. Er fand in seinem Originale die Namen der Vielecke, der Pyramiden, das Wort *pleura*, welches als Seite einer geometrischen Figur ihm gar wohl bekannt war, er fand geometrische Zeichnungen (Figur 36 bis 39 und 41 bis 44) und er glaubte wirklich Geometrisches vor sich zu haben. Jetzt fügte er die bei Griechen zuverlässig niemals im Kapitel der Polygonalzahlen vorkommende Figur der Ent-

stehung des Achtecks durch zwei im Kreise sich schneidende symmetrisch gegen einanderliegende Quadrate (Figur 40) hinzu. Jetzt hörte die Aufgabe, aus der Polygonalzahl die Seite derselben zu finden, für ihn auf eine selbstständige Aufgabe zu bilden; sie war ihm nur die Bestätigung des gefundenen Flächeninhaltes, nur die Rückversicherung bei derselben allerdings gründlich zahlungsunfähigen Stelle, wenn es sich um den wirklichen Flächeninhalt gehandelt hätte. So gelangte das Arithmetische zwischen die Vorschriften rechnender Geometrie, so erhielten es die späteren Schüler, und was sie daraus machten, war selten viel Gescheidtes.

Zu diesen Schülern dürfen wir vielleicht Anicius Manlius Torquatus Severinus Boetius zählen, der ungefähr von 472 bis 525 lebend eine Geometrie verfasst hat. Wir haben nicht die Absicht den alten Streit hier zu erneuern, ob die Geometrie des Boetius, welche wir jetzt durch Friedlein's handliche Ausgabe[243]), befreit von den allseitig als nicht dazu gehörig anerkannten Zuthaten in gereinigtem Texte zu leichter Vergleichung besitzen, ob diese echt sei. Für uns ist sie es. Damit unsere Meinung erschüttert würde, müssten erst die zahlreichen Gründe, welche wir und die mit uns derselben wissenschaftlichen Ansicht anhängen für die Echtheit vorgetragen haben[244]), widerlegt sein, und dazu hat noch Niemand auch nur einen Anfang gemacht. Unsere Gegner verharren stets bei ihren alten, wesentlich von dem Unglauben an die Abacusstelle dictirten Unmöglichkeitsbehauptungen. Mit Schweigen über positive Gründe macht man dieselben nicht todt, man liefert dadurch höchstens das Zugeständniss, dass man Nichts zu entgegnen wisse. Uns also, wir wiederholen es, ist die Geometrie des Boetius echt, dieselbe Schrift, welche er nach Euklid bearbeitete, von welcher ein Codex bereits im Jahre 821 im Kloster Reichenau vorhanden war[245]), von welcher ein anderes Exemplar im Jahre 982 zu Mantua in die Hände Gerbert's gelangte, von welcher mannigfache Handschriften noch heute vorhanden sind, wesentlich unter einander übereinstimmend und bis in das X. S. hinaufreichend[246]). Dürfen wir aber, selbst wenn die Vorbedingung als erfüllt betrachtet wird, dass uns das unverfälschte Material vorliege, hier

von Boetius reden? Wir dächten wohl. Boetius ist zwar kein Feldmesser, er lehnt sich zwar der eigenen Aussage nach zumeist an Euklid an[247]), aber wenn wir von vorn herein ankündigten, wir würden uns nicht allzuängstlich um die in unserem Titel aufgestellte Schranke kümmern, so hat auch Boetius es nicht unterlassen, den Vorbehalt auszusprechen, dass er an der Hand der agrimensorischen Schriftsteller über Euklid hinausgehe[248]). Wir werden also nur über das erste Buch wesentlich euklidischen Inhaltes rasch hinwegeilen, höchstens den Umstand betonend, dass die Definitionen des Boetius von denen des Balbus mehrfach im Wortlaute abweichen, immer aber so weit mit jenem übereinstimmen, dass man sieht, man hat es nur mit zwei Uebersetzungen desselben Originales zu thun, oder vielleicht mit einer Umarbeitung eines vorhandenen lateinischen Musterwerkes, von welchem die neue Schrift sich doch einigermassen unterscheiden sollte[249]). Das zweite Buch mit seiner rechnenden Geometrie verlangt unsere ganze Aufmerksamkeit, welche nicht ohne Belohnung bleibt. Wir finden uns sogleich unter alten Bekannten. Nipsus und Epaphroditus begrüssen uns aus einer Reihe von Aufgaben, nur umhüllt von der schwülstigeren Sprache des VI. S., aber meistens mit den alten Zahlen operirend[250]). Oder sollte Boetius mit Nipsus, mit Epaphroditus aus dem gleichen Urquell geschöpft haben, sei es aus einem griechischen Heron, sei es aus dessen ältester lateinischer Bearbeitung? Wir wissen hierauf Nichts zu antworten und stellen unseren Lesern die Wahl frei, wofür sie sich entscheiden. In einer Boetius und Nipsus gemeinsamen Stelle finden wir den Schlüssel zu jenem Schreibfehler, der bei Nipsus betont werden musste. Bei Boetius heisst es nämlich in der interessanten Aufgabe aus Hypotenuse und Fläche des rechtwinkligen Dreiecks die beiden Katheten zu finden: „Nun wollen wir versuchen zu zeigen, wie durch den Podismus der Hypotenuse die Summe der Höhe und der Basis in Fussen gefunden werden kann.“ Hiess es ähnlich bei Nipsus, und liess der Abschreiber den zu Podismus gehörenden Genitiv „der Hypotenuse“ fort, so war der sinnentstellende, historisch glückliche Schreibfehler im Arcerianus erreicht[251]). Ausserdem gebraucht Boetius

für den Unterschied das Wort *differentia*, das seltene *interstitio* des Nipsus kommt bei ihm nicht vor. Eine vollständige Aehnlichkeit mit Epaphroditus bieten die Aufgaben die Flächen zweier Berge auszumessen, nur dass bei Boetius die Brüche bei der Umwandlung der Quadratfusse in Jucharte weggelassen sind. Allerdings sind auch wichtige Unähnlichkeiten der drei Schriftsteller vorhanden. Nipsus' 5. Aufgabe steht allein da in Anwendung der heronischen Dreiecksformel. Zu Epaphroditus § 7, 25, 39 haben wir weder bei Nipsus, noch bei Boetius, noch bei Heron die Parallelstellen auffinden können. Boetius zeigt uns von seinen römischen Vorgängern, in der Gestalt, in welcher wir sie kennen, Uebergangenes, dessen heronische Quelle wir nachzuweisen im Stande sind[252]), z. B. jene schlechte Annäherung zur Fläche eines unregelmässigen Vierecks, welche das Product der halben Summen je zweier gegeneinanderüberliegender Seiten zu bilden vorschreibt. Boetius und Epaphroditus begegnen sich in der Lehre von den Polygonalzahlen, die bei Boetius nur noch etwas mehr von ihrem arithmetischen Gewande abgestreift hat, indem z. B. beim Achteck nur Figur 40, nicht auch die bei Epaphroditus sie begleitende, bei einem Arithmetiker mögliche Figur 39 abgebildet ist. Die falsche Sechsecksformel gleicht der des Epaphroditus vollständig, die Fünfecksformel dagegen ist noch falscher als dort, indem neben dem Eintreten einer Addition statt einer Subtraction auch die nachmalige Halbirung in Wegfall gekommen ist[253]). Dagegen hat sich bei Boetius die sichere Spur der allgemeinen Formel für Auffindung der Polygonalzahl aus ihrer Seite erhalten[254]), welche wir bei Epaphroditus nur wahrscheinlich machen konnten. Die Seite aus der Polygonalzahl zu finden, lehrt Boetius nur bei der Dreieckszahl, die Untersuchungen über Pyramidal- und Kubikzahlen fehlen gänzlich.

Dem Inhalte nach dem Boetius nahe verwandt ist jener Anonymus von Chartres, welcher uns leider nur durch den Auszug in der Geschichte der Geometrie von Chasles bekannt ist[187]). Das Vertrauen, welches wir in diesen Altmeister historisch-mathematischer Wissenschaft setzen, ist ein volles, aber dennoch wird ein Auszug niemals den Ab-

druck der betreffenden Quellen selbst zu ersetzen im Stande sein. Man liefert in einem Auszuge doch stets nur das, was einem bemerkenswerth schien, und in dieser Schätzung können grosse Abweichungen von Person zu Person, aber auch von Zeit zu Zeit stattfinden. Neues Material lässt neue Fragen auftauchen, und zu deren Lösung können unter Umständen wenige Worte hinreichen, welche eine ungeahnte Bedeutung gewinnen, vorher ganz gleichgültig schienen. Wir erinnern als ein Beispiel nur an die vorhin gegebene Erklärung des Schreibfehlers im arcerianischen Nipsus aus dem Boetius. Vielleicht erfreut uns das verehrte Mitglied der pariser Akademie noch durch eine Veröffentlichung des Textes, oder wenigstens durch eine Erklärung über einige hier zu erörternde Punkte. Neben vielem Aehnlichen, man kann wohl sagen Gleichem zwischen dem Anonymus und Boetius, wozu alles Arithmetische, ferner die Auffindung des Durchmessers des Innenkreises eines rechtwinkligen Dreiecks gehört, sind doch auch wesentliche Verschiedenheiten hervorgehoben. Der Anonymus hat die heronische Dreiecksformel, welche bei Boetius, wie bei Epaphroditus fehlt, während Nipsus sie kennt. Beim Anonymus fehlt die angenäherte Berechnung der Fläche des unregelmässigen Vierecks, mit welcher Boetius wieder allein steht. Das gleichseitige Dreieck wird, wie in § 3 des Epaphroditus, dadurch gemessen, dass von dem Quadrate der Seite das Quadrat der halben Seite abgezogen wird, um das Quadrat der Höhe zu erhalten, worauf Ausziehung der Quadratwurzel und Vervielfachung mit der halben Seite die Fläche liefert. Boetius dagegen erhebt die Seite, welche bei allen drei Schriftstellern, wie bei Heron von Alexandrien 30 heisst, ins Quadrat und zieht von den so erhaltenen 900 ohne Weiteres 510 ab, um zur Fläche 390 zu gelangen, muthmasslich von der Methode $a^2 - \frac{17}{30} a^2$ Gebrauch machend, welche dem Ergebnisse nach mit dem heronischen $\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{10}$ übereinstimmt[255]). Der Anonymus nennt wie Epaphroditus die Scheitellinie *vertex seu coraustus*, während Boetius das griechische *κορυφή* in der Geometrie wie in der Arithmetik nur durch *vertex* übersetzt, sich, wie wir anderwärts gesagt

haben, dadurch als der gleiche Verfasser beider Schriften auf's Neue erweisend. Chasles hat nun in Bezug auf die Persönlichkeit des Anonymus von Chartres eine Vermuthung ausgesprochen. Er sagt zunächst: „Der reine und leichtere Styl dieses Stückes der Geometrie deutet an, dass es früher geschrieben ist als zur Zeit, in der Boetius lebte.“ Wir wissen die Schwäche einer auf stylistische Merkmale sich gründenden Zeitbestimmung wohl zu würdigen und halten uns grundsätzlich fern davon, sichere Schlüsse aus solchen Dingen zu ziehen, so verführerisch manche sich darbieten. Eine stylistische Zeitvergleichung zweier denselben Gegenstand behandelnder Schriftsteller in der Allgemeinheit, dass man sich begnügt, den Einen für erheblich älter als den Anderen zu erklären, scheint uns dagegen volle Berechtigung zu besitzen. Verhält es sich doch ganz ähnlich mit den Altersbestimmungen von Handschriften, wo mit ziemlicher Gewissheit eine Handschrift älter als eine andere ähnlichen Inhalts genannt werden kann, während die absoluten Zeitbestimmungen meistens innerhalb der Schranken eines halben, oftmals eines ganzen Jahrhunderts schwanken. Wir schenken also der Behauptung, der Anonymus von Chartres habe vor Boetius gelebt, vollen Glauben, und würden gern die Frage beantwortet wissen, wie sich seine Latinität zu der des Epaphroditus verhält, mit welchem man ihn des Inhaltes wegen beinahe zu identificiren versucht wäre. Chasles freilich, welchem der gedruckte wie der handschriftliche Epaphroditus grade so unbekannt gewesen zu sein scheint, wie uns selbst bis vor etwa einem halben Jahre, kommt zu einer anderen Hypothese. Er fährt an jenen Satz weiterknüpfend unmittelbar fort: „Wir sind daher ganz natürlich zu dem Schluss gekommen, dass es das Werk des Frontinus selbst sei, von dem Boetius sagt, dass er von ihm entlehnt habe.“ Diese Folgerung aus den Worten des Boetius zu ziehen, in welchen doch nicht mehr gesagt ist[248]), als dass er einige Definitionen nach Frontinus mittheilen wolle, und dass wer über Grenzabsteckungen und Rechtscontroversen belehrt sein wolle, bei Frontinus nachzulesen habe, scheint uns etwas kühn. Soll aus Worten des Boetius heraus eine Entdeckung der Persönlichkeit des Anonymus von Chartres

gelingen, so würden wir auch heute noch einen dritten Schriftsteller in Vorschlag bringen, den wir schon früher einmal in dieser Beziehung genannt haben[256]), den Architas Latinus. Den Abacus, sagt Boetius, habe Architas gelehrt; der Abacus findet sich in dem Fragmente von Chartres. Das rechtwinklige Dreieck rational von einer graden Zahl aus zu bilden soll einer Vorschrift des Architas nachgebildet sein; dieselbe Vorschrift findet sich wieder in jenem Fragmente. Den Diameter des dem rechtwinkligen Dreiecke eingeschriebenen Kreises berechnet Boetius nach Architas; auch diese Methode gehört dem Anonymus von Chartres an[257]). Gewiss eine Reihe von Gründen, welche eine genaue Untersuchung auch dieser letzten Hypothese über die Persönlichkeit des Anonymus neben den beiden anderen wünschenswerth erscheinen lassen, eine Untersuchung, welche aber nur der mit einiger Aussicht auf Erfolg führen könnte, dem der genaue Text des Anonymus zu Gebote steht.

Zum Schlusse dieses Abschnittes besprechen wir noch in Kürze einen anderen Anonymus, der vielleicht besser schon dem folgenden Abschnitte zugewiesen würde und seine Aufnahme hier nur dem fast zufälligen Grunde verdankt, dass er in der Ausgabe Römischer Feldmesser abgedruckt ist[258]). „Ueber die Ausmessung der Jucharte", so heisst die kleine Sammlung von falschen und unverstandenen Rechnungen, welche aber grade als Beweis immer grösseren Zurückgehens in der Verständniss der überlieferten Lehre von Interesse ist. Gleich am Anfange findet sich zwar kein Rechenfehler, aber ein Denkfehler, welchen wir mit Hultsch[259]) unbedenklich dem Verfasser selbst zur Schuld geben. Als Feldmaass wird nämlich das Lagerjuchart von 288 Quadratruthen, von 28800 Quadratfuss angegeben, eine Fläche, welche 18 Ruthen in jeder Seite lang sei und einen Umfang von 72 Ruthen besitze. So richtig das Letztere ist, so falsch ist die Annahme der gleichen Seiten. Das Juchart ist immer ein Doppelmaass[260]), d. h. ein Rechteck, dessen eine Abmessung das Doppelte der zweiten beträgt, und insbesondere wird es von Isidorus im ersten Drittel des VII. S. gradezu als eine Figur erklärt, welche 240 Fuss oder 24 zehnfüssige Ruthen lang, 120 Fuss oder 12 zehnfüssige Ruthen breit

sei. Das giebt in der That den Inhalt und den Gesammtumfang wieder, welchen der gelehrt sein wollende Verfasser der Juchartmessungen aus fremden Quellen kennt, keineswegs aber die Gleichheit der vier Seiten von je 18 Ruthen, welche er in der Zwischenbemerkung folgert, und welche einen Inhalt von 324 Quadratruthen statt der 288 für das Lagerjuchart liefern würde.

Es bildet überhaupt, scheint es, eine Schwäche des Verfassers, jeden Umfang als den eines quadratisch begrenzten Raumes sich zu denken[261]), und so gelangt er in der nächsten Aufgabe, ein rundes Feld von 80 Ruthen Umfang zu messen, zu der Methode, den vierten Theil von 80 mit sich selbst zu vervielfachen. Er erhält somit 400 Quadratruthen oder 1 Juchart $1\frac{1}{2}$ Viertel und 4 Ruthen. Diese Annahme, mathematisch ausgedrückt die Annahme $\pi = 4$, finden wir bei keinem alten Feldmesser. Sie verweist muthmasslich den anonymen Verfasser des Bruchstückes in eine Zeit, die noch später fällt als der heilige Isidor von Sevilla lebte, also frühstens in die Mitte des VII. S., was auch mit der ältesten Handschrift der Juchartmessung nicht im Widerspruch steht, welche dem IX., vielleicht erst dem X. S. angehört. Darauf gründet sich unser Zweifel, ob wir überhaupt in diesem Abschnitte von jenem Schriftsteller zu reden haben, ob eine später noch zu erörternde Aehnlichkeit mit den Alcuin zugeschriebenen Beispielen in den Letzteren eine Abhängigkeit von unserem Verfasser oder umgekehrt die Quelle seines Irrthumes erkennen lassen darf. Endlich haben wir das Recht, überhaupt von einem Verfasser zu reden? Sollte nicht vielmehr unser Fragment selbst eine Fragmentenverbindung sein? Auch diese Möglichkeit ist nicht ganz auszuschliessen, da wir bald nach den erwähnten Aufgaben und im Widerspruche zu der dort an den Tag gelegten Unwissenheit den Halbkreis von der Basis 40 und der Höhe 20 zur Fläche $20 . 40 . 11 . \frac{1}{14} = 628\frac{1}{2}$ Ruthen, den Kreis vom Durchmesser 40 zur Fläche $40 . 40 . 11 . \frac{1}{14} =$ 1257 Ruthen 1 Fuss 5 Unzen ausgerechnet finden, ziemlich genau, da die Ruthe 10 Fuss, der Fuss 12 Unzen misst, und der Methode nach in Uebereinstimmung mit Vorschriften der heronischen Geometrie[262]).

Demselben heronischen Ursprunge ist bis auf die Zahlen getreu eine Aufgabe gegen Ende des Kapitels gefolgt. Das Sechseck von den Seiten 30 liefert die Fläche

$$\left(\frac{30^2}{3} + \frac{30^2}{10}\right) 6 = 2340,$$

welche genau ebenso, und das ist nicht ohne Interesse für nachher, die 9. Aufgabe des Columella bildet. Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks von der Seite 60 wird gefunden durch $60 \cdot \frac{60}{2} = 1800$. Wir kennen die altegyptische Vorschrift, wir wissen auch, dass sie in der als Mensurae benannten Schrift gelehrt ist. Die Fläche des Vierecks von den Seiten 40, 30, 20, 6 wird gefunden durch

$$\frac{40 + 30}{2} \cdot \frac{20 + 6}{2} = 455$$

wieder nach uralter Regel erhalten im Liber Geeponicus.

Römische Folgerungen aus den letzterwähnten schlechten aber alten Näherungsformeln sind vielleicht die Ausmessungen des Ochsenkopfförmigen und des Mondförmigen Feldes. Das *Caput bubulum* wird erklärt als zwei aneinanderstossende gleichseitige Dreiecke und durch Vervielfältigung der Seite mit sich selbst, d. h. als Quadrat berechnet, eine logische Folge der falschen Prämisse, dass das gleichseitige Dreieck durch das halbe Quadrat seiner Seite gemessen werde. Der *Lunatus ager* beginnt von grader Basis und spitzt sich in gekrümmten Seiten von kürzerer innerer, längerer äusserer Krümmung gewissermassen dreieckig zu (Figur 50). In der That wird die Fläche aus den Längenmaassen 10, 20, 60 als Dreieck berechnet zu $\frac{60 + 20}{2} \cdot \frac{10}{2} = 200$.

Am deutlichsten kennzeichnet sich die mathematische Impotenz des Verfassers in der Aufgabe, die Fläche eines Kreisabschnittes zu suchen. Ein solcher Abschnitt, der kleiner als der Halbkreis, habe 20 Ruthen als Basis, 5 Ruthen Breite. Basis und Breite werden nun addirt, mit 4 vervielfacht und halbirt zu 50 Ruthen; ferner wird das Quadrat der halben Basis durch 14 getheilt zu 7 Ruthen 1 Fuss 5 Unzen, und die Vereinigung beider Zahlen zu 57 Ruthen giebt die Fläche des Abschnittes[263]). Diese Rechnung zeigt

nämlich auf's Deutlichste, wie aus einem missverstandenen Beispiele eine falsche Regel entstand. Columella hat in seiner 8. Aufgabe unter Benutzung der heronischen Formel [180]) einen Kreisabschnitt von der Basis 16 und der Breite 4 ausgerechnet. Die Einsetzung der genannten Zahlenwerthe in die Gleichung

$$A = \frac{s+h}{2} \cdot h + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14} \text{ lieferte } \frac{16+4}{2} \cdot 4 + \frac{8^2}{14}.$$

Den Columella hat aber, wie sich oben als möglich ergab, wie jetzt fast gewiss ist, der Verfasser der Juchartmessung benutzt. Er hat dabei den im ersten Gliede auftretenden Factor 4 so sehr verkannt, dass er ihn nicht für die zufällige Länge von h, sondern für einen constanten, regelmässig wiederkehrenden Factor hielt, ohne zu bedenken, welcher Unsinn in der Vorschrift liegen würde, eine gewisse Summe nacheinander zu halbiren und zu vervierfachen, statt sie einfach zu verdoppeln. So weit geht das mathematische Denken unseres Schriftstellers nicht; er sieht in Columella's Rechnung die Anwendung der Formel

$$A = \frac{s+h}{2} \cdot 4 + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{14}$$

und glaubt vielleicht Wunder was gethan zu haben, wenn er nur ein anderes Zahlenbeispiel wählend $s = 20$, $h = 5$ einsetzt.

Doch wir schliessen damit diesen Abschnitt. Was gedruckt vollständig oder theilweise von römischer Geometrie aufzuspüren war, haben wir untersucht. Mancherlei mag noch handschriftlich da und dort zu entdecken sein. Bern, Breslau, München, Rostock besitzen alte Handschriften, deren agrimensorischer Inhalt im Allgemeinen bekannt ist, welche aber seither von mathematischer Seite nur dahin geprüft wurden, ob die Zeichnung des Abacus sich in ihnen finde. Unsere Darstellung hat vielleicht dazu beitragen können, in Gelehrten, welche an den Aufbewahrungsorten jener Codices ihren Wohnsitz haben, den Wunsch anzuregen, doch noch andere Fragen mit Hülfe derselben zu erörtern. Auch die reichen Klosterbibliotheken Oesterreichs besitzen vielleicht noch unbekannte handschriftliche Schätze für die

Geschichte der Geometrie. Für jeden Nachweis wird der Verfasser dieser Arbeit höchst dankbar sein. Sind wir doch überzeugt, dass jede Vermehrung des Materials nur dazu beitragen kann, den Satz fester und fester zu stützen, zu dessen Klarlegung gegenwärtige Untersuchung angestellt wurde: Alles, was die Römer Mathematisches wussten, entspricht dem griechischen Standpunkte dieser Wissenschaft, etwa im Jahre 100 v. Chr. Geb. Die Römer selbst mögen in der Feldmesskunst, worin sie seit Alters Uebung hatten, manche praktische Neuerungen eingeführt haben; in der Feldmesswissenschaft haben sie nur abgeschrieben, zuerst den Heron von Alexandrien, später wahrscheinlich eine älteste lateinische Bearbeitung dieses Schriftstellers, an welcher jeder neue Abschreiber nur kleine stylistische Veränderungen vornahm. Das wissenschaftliche Verständniss hat dabei eher abgenommen als zugenommen. Der folgende Abschnitt soll uns nun zeigen, wie sich das Gleiche bei den Schülern der Römer fortsetzt.

Abschnitt III.

Die Schüler der Römer.

Die arithmetischen Aufgaben und Auflösungen, welche sowohl in den Gesammtwerken des Beda Venerabilis, als in denen des Alcuin zum Abdrucke gekommen sind[264]), bieten mancherlei, auch den Gegenstand unserer heutigen Untersuchung Berührendes. Wem sie ursprünglich angehört haben mögen, wir meinen, wer ursprünglich diese Sammlung von Aufgaben theils ersonnen, theils und vielleicht zum wichtigeren Theile zusammengetragen hat, kann uns ziemlich gleichgültig sein, da er uns nur als Bestimmungsmoment für eine Zeitgrenze dient, zu welcher man unter dem nachweisbaren Einflusse römischer Gelehrsamkeit stand. Dass indessen die Zeit Alcuins innerhalb dieser Grenze liegt, bedarf für Jeden, der die Biographie dieses Gelehrten kennt[265]), keines Beweises, und auch die Verfasserschaft der Aufgaben zur Verstandesschärfung hat man ihm nicht ohne jeglichen Grund zugesprochen. Es ist gradezu bezeichnende Art der

unter Alcuin's besonderem Einflusse stehenden Hofschule Karl des Grossen gewesen, sich mit scharfsinnigen oder spitzfindigen Fragen zu beschäftigen. „Der trockene Ernst der Belehrung liess Raum zu freieren Uebungen des Geistes, Räthsel und dichterische Scherze und Spielereien flogen hin und her, und es fehlte nicht an Spott und Sticheleien. So steht der Lehrer zugleich inmitten der heiteren und bisweilen ausgelassenen Geselligkeit des Hofes, und er, den alle ob der Fülle und Gewandtheit seines Wissens preisen, verschmäht nicht die lehrhafte Brust durch den Trank des Bacchus oder der Ceres zu erfrischen.“ Diese, der neuesten Lebensbeschreibung Alcuins entnommene Schilderung passt gar wohl zur Einkleidung der arithmetischen Aufgaben, in welcher manchmal sogar die nicht allzusittsame Auffassung geschlechtlicher Beziehungen am kaiserlichen Hofe durchschimmert. Kommt noch hinzu, dass die Schreibweise der Aufgaben Alcuin anzugehören scheint, dass in einer bekannten Briefstelle Alcuins an Karl den Grossen die Uebersendung einiger Proben arithmetischen Scharfsinnes zur Ergötzung angezeigt wird[266]), so durfte Abt Frobenius von St. Emmeran um so mehr jene Sammlung unter die Werke Alcuins aufnehmen, wo sie im zweiten Bande der Regensburger Ausgabe von 1777 auf S. 440 bis 448 sich vorfindet, als er ausserdem seine Berechtigung dazu auf eine sehr alte Handschrift des Klosters Reichenau stützt, deren Abschrift ihm zu Gebote stand, und in welcher Alcuin als Verfasser genannt sei[267]). Es hat allen Anschein, als sei das Manuscript, auf dessen Copie die Frobenische Angabe sich bezieht, dasselbe, welches heute der Staats- und Hofbibliothek in Karlsruhe angehört, aus welcher wir es zur Benutzung nach Heidelberg erhielten, ein vortrefflich geschriebener stattlicher Pergamentband aus der alten Reichenauer Klosterbibliothek, im Grossen und Ganzen mit dem frobenischen Texte übereinstimmend. Allerdings sind auch nicht unwichtige Unterschiede vorhanden, welche uns, wenn der gelehrte Abt den Codex selbst benutzt hätte, sehr zweifelhaft machen müssten, ob die Identität mit dem gegenwärtig Karlsruher Codex denkbar wäre, ob insbesondere der Titel: *Propositiones Alcuini doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuen-*

dos iuvenes, welcher dem Reichenauer Codex ausdrücklich angehören soll, in dem von uns verglichenen Exemplare aber fehlt, nicht ein so wichtiges Beweisstück gegen die Identität bildet, dass alle für dieselbe sprechenden Umstände verschwinden. Dann müsste man annehmen, das Kloster Reichenau sei später als das Jahr 821 im Besitz eines Codex gewesen, welcher die Aufgaben Alcuin's mit der Ueberschrift enthielt; später als 821 sagen wir, weil in dem im vorigen Abschnitte erwähnten Kataloge aus jenem Jahre[245]) das Buch noch nicht vorkommt. Man müsste annehmen, im Jahre 1000 etwa sei eine Abschrift von jenem Codex genommen worden, in welchem die Ueberschrift wegblieb, und welche, gleichfalls der Reichenauer Klosterbibliothek angehörend, heute noch existirt, während das ältere Manuscript, wiewohl 1777 noch vorhanden, heute spurlos verschwunden ist. Eine andere Erklärung wüssten wir nicht, und wie gezwungen diese erscheint, brauchen wir unseren Lesern nicht erst zu sagen. Da ist es doch wohl natürlicher anzunehmen, der Mönch, welcher in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts für den Abt von St. Emmeran die Abschrift anfertigte, habe, auf welche Grundlage hin werden wir gleich sehen, die Ueberschrift selbstständig hinzugemacht, und der Karlsruher Codex sei doch der alte Reichenauer.

Dem sei nun, wie da wolle, die Handschrift, welche gegenwärtig als Codex CCV Augiensis der Staats- und Hofbibliothek in Karlsruhe signirt ist, besteht aus 350 Seiten in Quart von der gleichen oder doch von zum Verwechseln ähnlicher Hand auf Pergament geschrieben und stammt aus dem Ende des X., spätestens Anfang des XI. S.[268]). Der Codex beginnt mit einer theologischen Schrift über die Genesis, welche als erste Zeile die Worte führt *Praefatio Quaestionum in Genesim*, um dann in der zweiten Zeile durch die Widmungsformel: *Dilectissimo fratri siguulfo presbytero alcuinus salutem* den Verfasser zu erkennen zu geben. Dieser Tractat geht von S. 1 bis S. 107. Alsdann knüpft sich auf derselben Seite und unmittelbar dem Genesiscommentare sich anschliessend eine weitere Schrift an, welche man, weil kein neuer Verfasser genannt ist, dem Verfasser des ersten Theiles zuschreiben möchte. Die Anfangsworte heissen: *Incipiunt*

capitula propositionum ad acuendos iuvenes. Dann kommen auf zwei Seiten die Namen der 53 Aufgaben mit dem Schlussworte: *Finiunt capitula supier annixarum inigmatum,* und S. 109 beginnt wieder: *Incipiunt propositiones ad acuendos iuvenes. Propositio de limace* u. s. w. wie in der Druckausgabe.

Fassen wir das Gesagte nochmals zusammen, so ergiebt sich nach unserer Auffassung folgende Reihe von Thatsachen. Der Herausgeber der alcuinischen Werke hatte auf irgend eine Weise erfahren, dass in Reichenau ein alter Codex der Aufgaben zur Verstandesschärfung vorhanden war und dass Alcuin der Verfasser derselben sei. Er verlangte eine Abschrift, welche ihm bereitwillig zugeschickt wurde. Die Abschrift umfasste nicht den ganzen Inhalt des Reichenauer Codex, wie wir mit grosser Bestimmtheit aus dem Umstande wissen, dass Frobenius, wo er im ersten Bande seiner Alcuinausgabe von S. 304 an die dem Presbyter Siguulfus gewidmeten *Interrogationes et Responsiones in librum Geneseos* abdruckt, keinen von ihm verglichenen alten Reichenauer Codex angiebt, eine Unterlassung, welche er sich sicherlich nicht zu Schulden hätte kommen lassen. Der Abschreiber fühlte sich darum veranlasst, eine Ueberschrift zu ergänzen, wie er es verstand, vielleicht auch dadurch bestimmt, dass man ihm eine Copie der Aufgaben des Alcuin gradezu abverlangt hatte. Dagegen liess er das Register fort, welches in der Druckausgabe fehlt, ohne dass eine Bemerkung darüber vorhanden wäre und liess auch wahrscheinlich wegen mangelhafter Verständniss den Schluss fort, der auf S. 139—140 des alten Codex sich findet, und welchen wir in unseren Anmerkungen, wie es scheint erstmalig, veröffentlichen[269]).

Es handelt sich darin um Scherzräthsel, welche selbst dann nicht vollständig klar werden, wenn man die in Geheimschrift verhüllten Lösungen entziffert hat. Den Schlüssel dazu liefert die Ueberschrift der XXVI. Aufgabe: *De cursu cbnks bc fugb lepprks.* Die Aufgabe selbst ist die allbekannte von dem Hunde, welcher dem Hasen nachläuft, während der Hase 150 Fuss voraus ist, dagegen nur 7 Fuss lange Sprünge, der Hund aber 9 Fuss lange Sprünge macht. Zum Zwecke der Auflösung wird 150 halbirt und daraus mit

Recht gefolgert, dass der Hund den Hasen in 75 Sprüngen einhole. Jene Ueberschrift kann also, wie der Herausgeber auch in einer Anmerkung erläutert, nur als *De cursu canis ac fuga leporis* gelesen werden in Anwendung der nicht seltenen Verschiebung der Buchstaben, welche die Vokale jeweil durch die unmittelbar nachfolgenden Consonanten, also *a* durch *b*, *e* durch *f*, *i* durch *k*, *o* durch *p*, *u* oder *v* durch *x* ersetzen liess, möglicherweise auch *x* durch *z*, wie wir wenigstens in den Schlussräthseln argwöhnen. Diese ganze Geheimschrift ist entschieden kabbalistisch und nahe verwandt mit Methoden, welche auf orientalischem Boden seit dem grauen Alterthume verbreitet waren[270]), aber auch den Römern bekannt geworden sind, wie von Fachgelehrten bewiesen wurde.

Lassen wir es also dahingestellt, wer der Sammler der Aufgaben zur Verstandesschärfung war; nennen wir ihn immerhin Alcuin, um einen Namen für ihn zu haben, wie wir im vorigen Abschnitte des Namens Epaphroditus uns bedienten; aber verstehen wir darunter nur irgend einen Gelehrten, der seine Aufgaben vor dem Jahre 1000 zusammenstellte, worauf ihre Wiedergabe einem Mönche zufiel, der zwar zierliche Buchstaben hinzuzirkeln verstand, aber dem der Inhalt nicht mehr einleuchtete, sonst würde der Codex nicht so verhältnissmässig häufige Schreibfehler enthalten.

Zwischen dem Codex und der Druckausgabe sind die Verschiedenheiten, auch in den Zahlen, zu Dutzenden vorhanden, aber nur in drei Fällen hat der Codex die richtigere Zahl, nämlich in den Auflösungen der III., der VII. und der LII. Aufgabe[271]).

Als wir in unseren Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker[264]) uns mit Alcuin's Aufgaben beschäftigten, hoben wir einzelne hervor, an denen wir die dialektische Gewandtheit des Verfassers und einigermassen seine mathematischen Kenntnisse nachzuweisen uns bemühten. Heute wollen wir nicht diesen allgemeinsten Zweck verfolgen; wir wollen ebensowenig der Spur einer bestimmten Rechenmethode, der complementären Division, nachgehen. Wir wollen vielmehr in Alcuin einfach den unmittelbaren Schüler der Römer, den mittelbaren der Griechen erkennen lassen,

und dazu werden wir zum Theil anderen Aufgaben unsere Aufmerksamkeit zuwenden müssen. Wir haben in unserem I. Abschnitte von der Brunnenaufgabe gesprochen, deren Vorkommen bei Heron uns überraschte, deren bleibende Verwendung in Aufgabensammlungen fast aller Jahrhunderte wir verfolgen konnten[113]). Sie ist die VIII. Aufgabe Alcuin's. Wir fanden bei Heron Aufgaben, welche die Summation einer arithmetischen Reihe bezwecken[112]). Die XLII. Aufgabe Alcuin's lehrt dasselbe. Auf einer Leiter von 100 Sprossen sitzen Tauben, auf der untersten Sprosse eine, auf der folgenden 2 und so fort bis zur höchsten, auf der 100 sitzen. Alcuin addirt nun die Tauben der 1. und der 99., der 2. und der 98, schliesslich der 49. und der 51. Sprosse zu je 100, zusammen zu 4900. Ueberdies sind die 100 Tauben der obersten, die 50 der 50. Sprosse vorhanden, welche keine zu ihnen gehörende zweite Anzahl erkennen lassen. In Allem sind es also 5050 Tauben. Doch diese beiden Aufgaben ähneln den mit ihnen in Zusammenhang gebrachten nur in sehr entfernter Weise; jedenfalls fehlt bis jetzt die römische Vermittelung. Viel deutlicher tritt diese bei den geometrischen Aufgaben hervor.

Aufgabe XXII. *De campo fastigioso*, von dem abschüssigen (?) Felde giebt an, die beiden Seitenlängen eines Feldes betragen 100, die Breite vorn und hinten je 50, in der Mitte 60 Ruthen. Die Fläche ist das 100fache des $\frac{1}{3}$ der Summe der drei Breiten $50 + 60 + 50$. Wir haben diese Methode bei Patrikius besprochen.

Aufgabe XXIII. *De campo quadrangulo*, von dem viereckigen Felde. 30 und 32, 34 und 32 Ruthen sind die Maasse von je zwei gegenüberliegenden Vierecksseiten. Die Fläche ist $\frac{30 + 32}{2} \cdot \frac{34 + 32}{2}$. Boetius benutzt die gleiche Annäherungsformel.

Aufgabe XXIV. *De campo triangulo*, von dem dreieckigen Felde. Aus den Seiten 30, 30, 18 wird die Fläche $\frac{30 + 30}{2} \cdot \frac{18}{2}$ gefunden. Bei dem Verfasser der Juchartausmessung begegneten wir derselben alten Methode.

Aufgabe XXV. *De campo rotundo*, von dem runden

Felde, zeigt nur mit jener, wie wir sahen, muthmasslich verhältnissmässig neuen Schrift über die Juchartausmessung Aehnlichkeit. Wie dort, wenn auch nicht an derselben Zahl, wird der Umfang von 400 in 4 mal 100 zerlegt und alsdann die Fläche als in ein Quadrat verwandelt gedacht, so dass dieselbe zu $\left(\frac{400}{4}\right)^2 = 10000$ wird unter Annahme von $\pi = 4$.

Nicht viel von diesen Flächenformeln abweichend sind die Aufgaben XXVII, XXVIII, XXIX von dem viereckigen, dem dreieckigen und dem runden Staatswesen, in welchen es sich darum handelt, auf einem Felde von gegebener Gestalt Häuser von gleichfalls gegebenen Abmessungen aufzubauen, deren Anzahl gesucht wird. Das viereckige Feld hat eine Seite zu 1000, die gegenüberliegende zu 1100 Fuss, die beiden Fronten zu 600 Fuss; jedes Haus soll 40 zu 30 Fuss messen. Das Feld wird demgemäss betrachtet als habe es die Tiefe $\frac{1000 + 1100}{2} = 1050$, die Breite $\frac{600 + 600}{2} = 600$. Nun ist, heisst es weiter, $\frac{1050}{40} = 26$, $\frac{600}{30} = 20$, somit giebt es $26 . 20 = 520$ Häuser. Bei dem dreieckigen Felde, dessen Seiten 100, 100, 90 heissen, dessen Fläche also

$$\frac{100 + 100}{2} \cdot \frac{90}{2} = 100 . 45$$

sein würde, sollen die Häuser 10 und 20 nach beiden Richtungen messen; nun sei $\frac{100}{20} = 5$, $\frac{45}{10} = 4$, folglich gebe es $5 . 4 = 20$ Häuser. Das runde Feld von 8000 Fuss Umfang soll mit Häusern von 20 Fuss Breite und 30 Fuss Tiefe bebaut werden. Hier wird die Rundung in ein Rechteck umgewandelt, dessen Seiten sich eben so verhalten wie die beiden Abmessungen eines jeden Hauses, also wie 1 zu $1\frac{1}{2}$ (*sesquialtera proportione*). So theilt sich 8000 in 4800 und 3200, deren Hälften 2400 und 1600 sind;

$$\frac{2400}{30} = 80, \ \frac{1600}{20} = 80,$$

also $80 . 80 = 6400$ die Anzahl der Häuser.

Aufgabe XXX. *De basilica* handelt von der Belegung des rechteckigen Fussbodens des Saales mit Ziegelsteinen und bietet trotz der falschen Zahlen ein gewisses Interesse da-

durch, dass im *Liber Geeponicus* ganz ähnliche Aufgaben gestellt sind[272]). Nicht gar verschieden davon ist Aufgabe XXI *De campo et ovibus in eo locandis*, in welchem die Zahl der Schafe, deren jedes ein bestimmtes Flächenmaass abweidet, berechnet werden soll, für welche ein gegebenes rechteckiges Feld ausreicht und Aufgabe XXXI *De canava*, in welcher gefragt wird, wie viele elliptisch geformte Weinkufen in einem rechteckigen Kellerraume Platz finden, wobei noch ein Durchgang frei gelassen werden soll. Wir dürfen vielleicht dabei auch an §. 7 des Epaphroditus erinnern, in welchem ein Feld mit Bäumen zu bepflanzen ist. Unmittelbar hinter ihm fehlt im Arcerianus ein Blatt. Es ist nicht unmöglich, dass dort noch nähere Analogien zu den erwähnten alcuinschen Aufgaben behandelt wurden.

Es erscheint wohl schon jetzt in hohem Grade wahrscheinlich, dass die alcuinsche Sammlung unter Benutzung römischer Quellen zusammengestellt wurde. Ganz zweifellos ist vollends der römische Ursprung der Aufgabe XXXV, bei welcher wir noch einen Augenblick zu verweilen haben. Der Sinn der Aufgabe ist folgender. Ein Sterbender verordnet letztwillig, dass wenn seine in schwangerem Zustand zurückgelassene Wittwe einen Sohn gebähre, der Sohn $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$, die Wittwe $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ des Vermögens erben solle; gebähre sie aber eine Tochter, so solle diese $\frac{7}{12}$, die Wittwe $\frac{5}{12}$ des Vermögens erben. Wie hat nun die Theilung vor sich zu gehen, nachdem die Wittwe Zwillinge von verschiedenem Geschlechte geboren? Alcuin löst die Aufgabe so verkehrt, wie sie überhaupt nur lösbar ist. Er sagt: um Mutter und Sohn zu befriedigen, bedarf es 12 Theile, um Mutter und Tochter zu befriedigen gleichfalls, zusammen also 24 Theile. Davon erhält in erster Linie der Sohn 9, die Mutter 3; in zweiter Linie die Mutter 5, die Tochter 7. Das Schlussresultat gewährt also dem Sohne $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$, der Mutter $\frac{3+5}{24} = \frac{1}{3}$, der Tochter $\frac{7}{24}$ der Hinterlassenschaft. Ein schreienderes Unrecht als in dieser Auflösung enthalten ist, lässt sich kaum denken. Der Erblasser wollte die Kinder gegen ihre Mutter bevorzugen, den Sohn im Verhältnisse von 3 zu 1, die Tochter in geringerem Grade, aber immerhin

im Verhältnisse von 7 zu 5. Die Auflösung stellt das Alles auf den Kopf. Der Sohn, der Stammhalter der Familie, erhält nur eine Kleinigkeit mehr als die Mutter, die Tochter sogar weniger als die Mutter. Von dem, was der Erblasser wollte, ist Nichts erfüllt, denn wenn auch die Bestimmung, dass das Erbtheil des Sohnes sich zu dem der Tochter wie 9 zu 7 verhalten solle, aus den dem Sohne und der Tochter vermachten $\frac{9}{12}$ und $\frac{7}{12}$ herausgeklügelt werden könnten, so hat doch der Erblasser diese Bestimmung gewiss nicht beabsichtigt, da er an den Fall des Zusammentreffens eines Sohnes und einer Tochter gar nicht dachte. Diese Auflösung, dem Rechtsgefühle widerstrebend, arithmetisch ohne besonderen Werth, kann nur bei einem Volke entstanden sein, wo letztwillige Verfügungen nicht zu Hause waren, wo man also nicht gewohnt war, in den Geist eines Testamentserrichters sich hineinzudenken, um seine Absicht möglichst rein und unverfälscht zu erfüllen. Grade diesen negativen Charakter tragen aber die alten germanischen Einrichtungen. Wir haben in dem instinktiven Gefühle, dass dieser Aufgabe rechtsgeschichtlich zu Leibe gegangen werden müsse, einen jüngeren Juristen, welcher zum germanistischen Docenten sich vorbereitet, zu Rath gezogen. Herr Dr. G. Cohn, Kreisrichter a. D. aus Breslau versichert uns, dass Testamente, und nun gar derartige Testamente, ein dem deutschen Geiste fremdes Rechtsinstitut waren. Nur durch Einführung aus Rom kann diese Aufgabe auf deutschem Boden eine kümmerliche Heimath gefunden haben. Den römischen Anschauungen dagegen entspricht sie vollständig. Namentlich das Zurückstehen der Wittwe, fährt unser Gewährsmann fort, ist im römischen Geiste so sicher begründet, dass der mit den Kindern überlebenden Wittwe zu Trajan's Zeiten ein gesetzliches Erbrecht überhaupt nicht zustand, dass also ein Testament nothwendig war, um ihr nur einiges Vermögen zu sichern. Ja die römische Herkunft lässt sich noch viel bestimmter erweisen, indem die Pandekten an nicht weniger als drei Stellen[273]) ganz ähnliche Fälle zur Entscheidung bringen, von welchen nur der älteste als der zugleich nächstverwandte hier wörtlich Platz finden mag.

„Wenn der Erblasser so schrieb: Wenn mir ein Sohn

geboren wird, so soll dieser auf $\frac{2}{3}$ meines Vermögens, meine Frau aber auf die übrigen Theile Erbe sein; wird mir aber eine Tochter geboren werden, so soll diese auf $\frac{1}{3}$, auf das Uebrige aber meine Frau Erbe sein, und ihm nun ein Sohn und eine Tochter geboren wurden, so muss man das Ganze in 7 Theile theilen, so dass von diesen der Sohn 4, die Frau 2 und die Tochter 1 Theil erhält. Denn auf diese Weise wird nach dem Willen des Erblassers der Sohn noch einmal so viel erhalten als die Frau, und die Frau noch einmal so viel als die Tochter. Denn obgleich nach den feinen Bestimmungen des Rechtes ein solches Testament umgestossen werden sollte, so verfiel man doch aus rein vernünftigen Gründen auf die genannte Entscheidung, da ja doch nach dem Willen des Erblassers immer die Frau Etwas erhalten soll, mag ihm ein Sohn oder eine Tochter geboren werden. Auch Juventius Celsus stimmt hiermit vollkommen überein."

Diese Stelle stammt aus einem Werke des Salvianus Julianus, eines Juristen, der unter den Kaisern Hadrian und Antoninus Pius wirkte, während Juventus Celsus, auf den er sich beruft, um 100 n. Chr. gelebt hat. Es wirft ein ganz eigenthümliches Licht auf die Aufgabe, dass sie von einem Celsus herzurühren scheint, während etwa um dieselbe Zeitperiode ein Celsus, dessen Uebereinstimmung mit dem Juristen zwar nicht wahrscheinlich, aber doch auch nicht durchaus unmöglich ist[274]), zu dem Oberfeldmesser Balbus in engster Beziehung stand. Sollte der Ingenieur und der Jurist Celsus am Ende doch nur eine Person sein? Sollte Balbus in seinem dem Heron, wie wir wissen, nachgebildeten, von der späteren Zeit reichlich benutzten Werke auch andere als geometrische Aufgaben haben Platz finden lassen? Sollte er eine Erbschaftsrechnung, welche sicherlich seiner Zeit, in entfernt möglicher Weise seinem Freunde angehörte, mit aufgenommen haben? Auf den Julianus folgte mit der Entscheidung eines verwandten Falles Cäcilius Africanus, auf diesen Julius Paulus, ein glänzender Jurist des III. S., der unter Kaiser Alexander Severus der römischen Rechtswissenschaft zur Zierde gereichte. Aus der römischen Literatur verschwindet also die Aufgabe ihrem Sinne nach nicht. Die genauen Zahlenverhältnisse der alcuin-

schen Ueberlieferung begegnen uns freilich auf römischem Boden nicht, doch ist es sehr wohl möglich, ja wahrscheinlich, dass sie von dort bezogen wurden und dass Alcuin nur in der Auflösung sich zu erkennen giebt, den Schüler der Römer, der aber Nichts weniger als einen Fortschritt von dem Standpunkte seiner Lehrer aus bezeichnet. Wir brauchen unseren, mit modernen Uebungsbüchern bekannten Lesern nicht erst zu sagen, dass die Theilungsaufgabe von der Zwillinge gebährenden Wittwe sich bis auf die neueste Zeit erhalten hat.

Gleiches gilt noch von zwei anderen alcuinischen Aufgaben, deren Rückwärtsverfolgung uns bis jetzt noch nicht gelungen ist, und auf welche wir unsere Fachgenossen um so mehr aufmerksam machen möchten. Wir meinen die obenerwähnte Aufgabe XXVI von dem den Hasen verfolgenden Hunde und Aufgabe XVIII von dem Wolfe, der Ziege und dem Krautkopfe, welche in einem Boote, das nur einen Reisenden gleichzeitig befördert, über einen Fluss gesetzt werden sollen, so dass niemals Ziege und Krautkopf oder Ziege und Wolf, also nie zwei Feinde allein auf einem Ufer sich befinden sollen, während der Führer mit dem Boote unterwegs ist. Diese keinerlei Rechnung in sich schliessende Aufgabe, heute noch ein Räthsel zum Errathen für aufgeweckte Kinder, macht uns einen alterthümlichen Eindruck. Jedenfalls ist sie mit ihren einfacheren Verhältnissen das Vorbild der in der Reihenfolge der Sammlung ihr vorausgehenden Aufgabe XVII gewesen, in welcher mit dem ganzen Cynismusse karolingischer Hofsitte nach der Möglichkeit gefragt wird, drei Männer mit je einer Schwester über einen Fluss schaffen zu lassen, so dass kein Mädchen ohne den Schutz ihres Bruders der Gewaltthätigkeit eines anderen Mannes ausgesetzt bleibe, während der zur Verfügung stehende Kahn nur zwei Personen fasst.

So viel über die Aufgaben Alcuins zur Verstandesschärfung, d. h. um es ein letztes Mal zu wiederholen über Aufgaben, welche spätestens im X. S. zusammengestellt wurden, welche jedenfalls im Jahre 1000 etwa ohne Nennung eines besonderen Verfassers zugleich mit zuverlässig alcuinischen Schriften Verbreitung fanden, zugleich mit ihnen ab-

geschrieben, also auch zugleich mit ihnen studirt wurden, vielleicht mit Unrecht dem Stifter der Klosterschule von Tours stillschweigend zugewiesen, vielleicht auch wirklich durch ihn in Gebrauch gebracht, ihrem Inhalte nach keineswegs in Widerspruch gegen die Kenntnisse, welche man dem Manne zutrauen darf, der an der Schule zu York wie bei seinem Aufenthalte in der Lombardei Gelegenheit hatte, sich mit römischer Wissenschaft vertraut zu machen, so weit er sie eben verstand, so weit sie seiner besonders dialektischen Geistesrichtung zusagte.

Wir wenden uns zu der Zeit, in welcher der Karlsruher Codex jener Aufgaben entstanden ist, und zu einem Werke, welches dem geistig bedeutendsten Gelehrten jener Zeit zugeschrieben wird: zu Gerbert, dem nachmaligen Papste Sylvester II. und seiner Geometrie.

Es ist nicht das erste Mal, dass unsere historischen Forschungen den Lebensweg dieses merkwürdigen Mannes kreuzen. Seitdem wir uns in unseren Mathematischen Beiträgen zum Kulturleben der Völker am Eingehendsten mit ihm beschäftigten[275]), ist im Jahre 1867 eine Gesammtausgabe seiner Werke erschienen[276]), welche, wenn auch immer noch nicht alle Anforderungen erfüllend, die an einen correkten Abdruck gestellt werden dürfen, doch weit mehr als sonst die Bekanntschaft mit Gerbert verbreitet hat, und deren Herausgeber, H. Olleris, sich auch in der umfangreichen Einleitung und in den Anmerkungen bedeutende Verdienste um die politische, wie um die wissenschaftliche Geschichte des X. S. erworben hat. Im Grossen und Ganzen bleibt unsere frühere Darstellung unangetastet, und nur wenige Daten bedürfen nach der Ansicht von Olleris der Veränderung. Es ist hier, wo die ganzen Lebensschicksale Gerbert's mit Ausnahme der wenigen Jahre, welche er im Kloster Bobbio in Oberitalien zubrachte, sehr nebensächlicher Natur sind, nicht der Ort, über die Begründung aller Jahresangaben durch Olleris zu streiten, und so genüge die Bemerkung, dass nach seiner Meinung die Briefe No. 55 an Bischof Bonifilius von Gerona und No. 63 an Geraldus von Aurillac, in welchen die Schriften des Rechenmeisters Joseph erwähnt sind, und ebenso der Brief No. 60 an Lu-

pitus von Barcelona, in welchem eine Uebersetzung eines astronomischen Werkes erbeten wird, vor October 984 vielleicht von Rheims aus geschrieben sind. Der Brief No. 76 an Erzbischof Adalbero von Rheims über die Auffindung astronomischer und geometrischer Werke in Mantua soll nicht 982, sondern 985 geschrieben sein, indem die Reise nach Mantua in eben dieses Jahr falle; Gerbert habe damals auf's Neue zu kurzem Besuche die Alpen überstiegen und auch das Kloster Bobbio wiedergesehen, dessen Abt er einst war, das er Ende November 983 flüchtig hatte verlassen müssen. Dem berühmten arithmetischen Briefe No. 124 an Remigius den trierer Mönch geht es am Sonderbarsten. Olleris setzt im Allgemeinen die Briefe No. 89—117 in die Zeit vom 2. März 986 bis 21. May 987, die Briefe No. 118—148 in die Zeit vom 1. Juni 987 bis 23. Januar 989, behandelt aber alsdann den Brief No. 124 in seinen Anmerkungen zu dem früheren der beiden genannten Zeitabschnitte. Die Geometrie Gerbert's endlich setzt Olleris im Gegensatze zu Hock, welcher freilich ohne Begründung ihr das von uns früher gläubig nachgeschriebene Datum 996 giebt, schon in die Rheimser Periode, wo Gerbert als Lehrer wirkend seinen Schülern wohl ein derartiges Compendium in die Hand gegeben haben werde. Wir wollen später sehen, dass diese Zeitbestimmung ebenso wie die von Hock unhaltbar ist, dass vielmehr nur die Jahre 981 bis 983 die Geometrie Gerbert's entstehen lassen konnten.

Freilich haben wir damit vorläufig eine Frage bejaht, welche Olleris in Erwartung einer verneinenden Antwort gestellt hat[277]), die Frage, ob die von Pez nach einer salzburger, dem Kloster zu St. Peter angehörigen Handschrift veröffentlichte Geometrie wirklich Gerbert zum Verfasser habe. Friedlein in einer Besprechung der Olleris'schen Ausgabe[278]), mit welcher er sich sehr rasch vertraut gemacht hat, ist der gegentheiligen Meinung. Er nimmt an, jene Geometrie sei ein Sammelwerk, von dem vielleicht der mittlere Theil, Kapitel XIV bis XL, Gerbert zum Verfasser habe, die ersten Kapitel I bis XIII seien „eine Arbeit für sich“, von wem ist nicht angedeutet, dann der Schluss von Kapitel XLI bis XCIV sei eine wahrscheinlich durch zu-

fälliges Zusammenschreiben entstandene Sammlung von Aufgaben.

An dieser Ansicht ist so viel richtig, dass die hier gemachten drei Abtheilungen einen recht verschiedenartigen Inhalt zeigen. Es ist auch wahr, dass in den meisten Handschriften nicht die ganze Geometrie enthalten ist. Der Codex 7185 der grossen pariser Bibliothek rührt nach Olleris Angabe etwa aus dem Jahre 1200 her. In ihm, wie in einem ungefähr gleichalterigen Manuscripte von Oxford finden sich die Kapitel I bis XIII; in beiden steht als Verfasser Gerbert angegeben, aber im pariser Codex sicherlich von späterer Hand erst nachgetragen. Der Codex 7377 der pariser Bibliothek ist muthmasslich zwischen 1050 und 1150 entstanden. Ihn bilden wichtige Bruchstücke aus Kapitel XIV bis XL, dann fremdartige Gegenstände und die Geometrie des Boetius, dazwischen Kapitel XCIII, endlich Stücke aus dem ersten Theile der Geometrie bis Kapitel XIII, und der Name Gerbert's ist nur einmal als späte Randbemerkung vorhanden[279]. Von dem dritten Theile der Geometrie, Kapitel XLI bis XCIV finden sich bald diese, bald jene Kapitel in Handschriften in Rom, in Montpellier; aber auch hier fehlt überall der Name Gerbert's, oder ist nur von später Hand beigefügt. Setzen wir noch hinzu, was weder Olleris noch Friedlein hervorgehoben, dass Kapitel III und Kapitel XV Maassdefinitionen geben, welche nicht durchweg übereinstimmen, dass scheinbare Widersprüche zwischen der Geometrie und dem als echt allgemein anerkannten Briefe Gerbert's an Adelboldus Schwierigkeiten bereiten, dass im Kapitel XII[280]) eine Aufgabe sich findet, welche nur mit anderen Zahlen im Kapitel XLII wiederkehrt, dass ebenso eine und dieselbe Methode der Höhenmessung in den Kapiteln XXXI und LXXXII gelehrt wird, so sind das in der That gewichtige Gründe, an einer einheitlichen Geometrie zu zweifeln. Ihnen gegenüber erhebt sich die Frage: Wie kam man überhaupt dazu, eine solche anzunehmen?

Wir haben die Antwort darauf bereits früher angedeutet. Der gelehrte Benedictiner Pater Bernhard Pez war es, der das Werk am Anfange des vorigen Jahrhunderts aus einer salzburger Handschrift erstmalig abdruckte und ihm

den Namen beilegte, welchen es noch führt. Aus seiner Beschreibung[281]) jener Handschrift geht so viel hervor, dass die Geometrie und der Brief an Adelboldus von derselben Hand des XII. S. geschrieben in jenem salzburger Codex vereinigt sind, dass die Geometrie in keine Kapitel eingetheilt ist, dass Fehler im Texte und in den Figuren häufig sind, ein Umstand, der, wie uns däucht, dafür spricht, dass hier nicht die Arbeit eines immer mehr oder weniger sachverständigen Compilators, sondern nur die eines Abschreibers vorhanden sein kann, sei es dass ihm ein einheitliches Werk, sei es dass ihm gesammelte Auszüge als Vorlage dienten. Damit ist also jedenfalls soviel bewiesen, dass im XII. S. die Geometrie und der Brief an Adelboldus vereinigt existirten. Damit gewinnt die Möglichkeit, dass beide von Gerbert herrühren können, noch nicht die Oberhand, aber doch ein erlaubtes Dasein, und wir durften getrost in eine doppelte Untersuchung eintreten. Wir durften die Schriften selbst ernstlicher, als es von unseren Vorgängern geschehen war, auf ihren inneren Gehalt befragen, ob darin etwa eine Bestätigung oder eine Widerlegung der Gerbert-Hypothese sich findet. Wir durften den Versuch machen, die alte Handschrift selbst genauerer Prüfung zu unterwerfen.

Auf den Inhalt müssen wir nachher noch ausführlich zurückkommen. Wir bemerken jetzt nur ganz im Allgemeinen Folgendes. Widersprüche kommen vor, darauf haben wir schon aufmerksam gemacht, allein eben so laut müssen wir betonen, dass viel gewichtigere Momente dafür sprechen, Gerbert als Verfasser des Ganzen anzuerkennen, so weit überhaupt von einem Verfasser die Rede sein kann, der höchstens als Herausgeber, als Redacteur arbeitete. Als solcher hat er dem Ganzen eine gleichmässige Farbe gegeben, lässt er einen einheitlichen Styl nicht verkennen. Ueberall zeigt sich eine gewisse behäbige Breite, ein Bestreben recht klar zu sein, welches um so deutlicher hervortritt, je genauer wir die Quellen nachzuweisen im Stande sind, aus denen der Inhalt geschöpft ist. Die Zahlenangaben des benutzten Originals werden selten abgeändert, vielleicht schon aus dem Grunde, um die Rechnungen nicht neu an-

stellen zu müssen, aber der Text ist in die Länge und Breite gedehnt, ja es geht so weit, dass vielleicht einmal eine Definition gegeben wird zu dem einzigen Zwecke, einen Schreibfehler eines alten Copisten zu rechtfertigen, dass nach dieser Rechtfertigung das falsche Wort mit grösster Seelenruhe weiter gebraucht wird. Dazu kommt als weitere Unterstützung dafür, dass dieser einheitlich schreibende Verfasser oder Compilator, den letzteren Namen verdient er, wie schon bemerkt, mit mehr Recht als den ersteren, wirklich Gerbert war, der sehr erhebliche Umstand, dass die Quellenwerke, soweit sie überhaupt nachweisbar sind, sämmtlich Gerbert zu Gebote gestanden haben. Diese Quellen sind nämlich: die Arithmetik des Boetius, Marcianus Capella, die Feldmesser des Codex Arcerianus, vielleicht die Aufgaben des Alcuin. Dass Gerbert mit der Arithmetik des Boetius und mit den Schriften des Marcianus Capella vertraut war, bedarf keines Beweises für den auch nur oberflächlichsten Kenner mittelalterlicher Literatur. Seiner Beziehungen zum Kloster Bobbio haben wir gedacht, und es steht fest, dass dieses Kloster im X. S. im Besitze des Codex Arcerianus war, den also Gerbert dort benutzen konnte. Begreiflich endlich bis zum Ersatz des Beweises wird die Kenntniss der echten oder unechten Aufgaben Alcuin's bei einem Schüler des Scholasticus Raimund, der selbst den Unterricht des in der Klosterschule von Tours aufgewachsenen Odo von Clüny genossen hatte.

Ob uns die Untersuchung des salzburger Codex gestattet werden würde, darüber waren wir zu Anfang einigermassen in Sorgen. Olleris erzählt nämlich[282]), dass zwei Erkundigungsbriefe, welche er an Pater Amandus Jung, den Vorsteher des Klosterarchivs zu richten sich die Ehre gegeben, ohne Antwort geblieben seien. So konnte es uns auch gehen! Wir freuen uns, im unmittelbarsten Gegensatze dazu die Liebenswürdigkeit rühmen zu können, mit welcher derselbe Pater Amandus Jung alle durch uns an ihn gerichteten Fragen fast mit Wendung der Post auf's Ausführlichste beantwortete, und diesem unsere Neugier auf's Höchste spannenden Briefe folgte auf unsere Bitte sofort die Uebersendung des werthvollen, ein Unicum darstellenden Bandes, welchen

wir in den Räumen der Heidelberger Universitätsbibliothek und mit der Unterstützung des bewährten Handschriftenkenners, der diese Anstalt leitet, in aller Musse bestimmen und durchforschen durften. Wir können also nicht umhin, die Vermuthung auszusprechen, es müsse über den Briefen des Herausgebers von Gerbert's Werken ein besonders missgünstiger, nicht ganz unverschuldeter Stern geleuchtet haben, so dass entweder die Briefbezeichnung der Leserlichkeit oder der Genauigkeit entbehrte, oder sonst ein Fehler von seiner Seite gemacht wurde, da wir keinerlei Grund sehen, wesshalb Bibliothekar und Abt des St. Peterstiftes ein so ganz entgegengesetztes Benehmen gegen den Gelehrten aus Clermont und gegen uns an den Tag legen sollten.

Die Handschrift, in der Bibliothek des Benedictinerstiftes St. Peter zu Salzburg als Codex a. V. 7 bezeichnet, ist eine sehr gut erhaltene Pergamenthandschrift, 15 Centim. hoch, 11½ Centim. breit. Auf jeder Seite stehen 21 Zeilen. Die Linien sind mit einem Stifte gezogen, nicht gefärbt. Die Handschrift beginnt auf 38½ Blättern mit der Schrift des Herrmannus Contractus über das Astrolabium, welche Pez gleichfalls in demselben Bande des Thesaurus, in welchem Gerbert's Geometrie abgedruckt ist, veröffentlicht hat. Dann folgt mit fol. 39 *verso* die Geometrie, deren nähere Beschreibung wir nachfolgen lassen. Sie schliesst mit den Worten, mit welchen auch im Drucke Kapitel XCIV abbricht: *et intervallo. e. circulum scribimus,* worauf fol. 95 *verso* Zeile 3 von unten noch *finit* steht, und daran auf derselben Zeile sich anschliessend ein bis zum Schlusse von fol. 101 *recto* reichendes Fragment beginnt, welches wir in unseren Anmerkungen sammt den am Rande beigeschriebenen Glossen zum Abdrucke bringen[283].

Letztere sind fast gleichaltrig mit der Handschrift. Wenn wir Glossator und Abschreiber nicht gradezu für dieselbe Persönlichkeit halten möchten, so verhindert uns daran nur die vorbetonte Unwissenheit des Abschreibers in mathematischen Dingen. Freilich um die Anmerkungen zu dem eben in Rede stehenden Fragmente anzufertigen, bedurfte es keinerlei mathematischen Wissens, höchstens in der mit 37 von uns bezeichneten Glosse der oberflächlichsten

Kenntniss von der Arithmetik des Boetius, aber mit den Glossen zur Geometrie verhält es sich in einzelnen Fällen doch etwas anders. Dass der Glossator dort von dem ihm bekannten geometrischen Werke des Frontinus spricht, haben wir schon früher beigezogen[186]. Zum Worte *matheseos* des Prologs unterscheidet er die wahre Mathematik von der falschen, d. h. von der Sterndeuterei, Giftmischerei u. s. w., welcher er die Rechtschreibung Matématik ohne h beilegt[284]. Zum Kapitel I beruft er sich auf Macrobius[285]. Dass Rechnungen, insbesondere Divisionen, auf dem Abacus zu vollziehen sind, sagt er mehrfach[286]. Zu Kapitel VIII giebt er, wenn wir ihn richtig verstehen, als geometrischen Satz an, dass die Senkrechte, welche aus dem stumpfen Winkel eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird, den stumpfen Winkel in zwei Theile zerlege, deren grösserer (kleinerer) grösser ist als der grössere (kleinere) spitze Winkel des Dreiecks[287]. Zu Kapitel XLV ist es ihm klar, dass nur von pythagoräischen Dreiecken die Rede ist, also von solchen rechtwinkligen Dreiecken, deren Seiten in dem Verhältnisse 3:4:5 zu einander stehen[288]. In einer Bemerkung zu Kapitel XLVI legt er wiederholt Kenntnisse an den Tag, welche zeigen, dass ihm die Arithmetik des Boetius geläufig gewesen sein muss[289]. Zu dem Briefe Gerbert's an Adelboldus bemerkt er, dass in jedem gleichseitigen Dreiecke die Höhe sich finden lasse, indem von der Seite $\frac{1}{7}$ ihrer Länge abgezogen wird, und knüpft daran eine kurze Bruchrechnung[290], das sind doch Dinge, welche in der Zeit, zu welcher der Glossator lebte, ebensogut wie heute dem mathematisch ganz ungebildeten Schreiber unmöglich wären.

Doch kehren wir von dieser Abschweifung, welche uns gestatten wird, weiter unten einen Schluss aus deren Inhalt zu ziehen, zu dem an die Geometrie sich anfügenden Fragmente zurück. Es besteht aus 11 Paragraphen, wenn diese nachträgliche Eintheilung uns gestattet wird. §. 1 spricht von einem Wegemesser, also von einer Vorrichtung, bei welcher wir unwillkürlich an Heron und an Vitruvius denken müssen. Allerdings ist der Verfasser dieses Paragraphen in viel spätere Zeit zu setzen, da er von dem Schritte der

Burgundionen, der Italer, der Bowaren und der Araber redet, eine eigenthümliche Nationalitätenzusammenstellung. — §. 2 beweist den Satz von der Winkelsumme im Dreiecke durch Ziehung einer Parallele zur Grundlinie durch die Spitze des Dreiecks hindurch. — §. 3 nennt die Höhenmessung aus dem Schatten eine so bekannte, dass es als ein Mangel zu erachten sei, sie auseinanderzusetzen. — §. 4 giebt nach Origenes die Länge der Elle. — §. 5 lehrt nach „Egesippus“ oder „Eugippus“ die Verhältnisse des menschlichen Körpers kennen. Auch dieser Gegenstand weist auf einen Leser des Vitruvius hin, bei welchem er ihn im I. Capitel des III. Buches behandelt finden konnte. — §. 6 entspricht dem Inhalte, aber nicht dem Wortlaute nach dem XXXIII. Capitel von Gerbert's Geometrie und lehrt eine Länge mit Benutzung ähnlicher Dreiecke messen. — §. 7 beschreibt eine Uhr, bei welcher Janus und Apollo, dem Glossator zufolge durch Wasser in Bewegung gesetzt, die Stunden anschlagen. — §. 8 bis 11 endlich sind astronomischen Inhaltes im weiteren Sinne des Wortes und handeln von der Anfertigung eines Erdglobus, von der Bestimmung der Tageslänge, von den Zonen der Erde und von der Einzeichnung des Thierkreises auf einen Himmelsglobus.

Dieses Fragment von uns unbekanntem, nicht sehr früh anzusetzendem Verfasser schliesst auf Fol. 101 *recto* ab. Die Rückseite bringt den in den Ausgaben der Gerbert'schen Geometrie stets mit gedruckten Brief des Adelboldus an Gerbert[291]) über die Ausmessung der Kugel, deren Körperinhalt, *crassitudo*, so berechnet wird, dass von dem Cubus des Durchmesser $\frac{10}{21}$ abgezogen, oder unmittelbar $\frac{11}{21}$ genommen werden. Zwischen dem für den Druck im Pez'schen Thesaurus benutzten Texte und unserem Codex findet am Anfang und Ende ein Unterschied statt, welcher zeigt, dass bei dem Codex Einiges fehlt. Der Text bei Olleris stimmt am Anfange mit dem bei Pez, am Schlusse mit unserem Codex überein. Dieser Brief geht bis Fol. 105 *recto* Zeile 7 und sofort auf Zeile 8 beginnt der bis zum Ende von Fol. 106 *recto* sich erstreckende Brief Gerbert's an Adelboldus über die Unrichtigkeit, welche darin liege, die Trigonalzahl als Maass des Flächenraumes eines gleichseitigen Dreiecks

anzusehen. Nun folgt wieder ein aus zwei Paragraphen bestehendes Fragment. Der erste dieser Paragraphen scheint in einem Pariser Codex und in einem Vaticancodex zwischen dem XL. und XLI. Capitel der Gerbert'schen Geometrie fast ganz gleichlautend vorzukommen und hat bei Olleris seinen Abdruck gefunden[292]). Der Inhalt ist bei dem Zustande des Textes nicht mit Sicherheit zu bestimmen, und noch unverständlicher ist der zweite Parapraph astronomischen Inhaltes.

Damit schliesst der Codex, so weit er von einer Hand geschrieben erscheint, ab. Von dem 111. Blatte aber beginnt ein neues Werk in ungemein kleinen Zügen, welche fast eine Loupe unentbehrlich machen, hingemalt mit fast in jedem Worte auftretenden Abkürzungen und Buchstabenverschlingungen, für den Diplomatiker von sehr grossem Werthe, weil es eine der seltenen Schriftproben von genau angegebenem Datum ist. Das Buch betitelt sich als *Robertus Anglicus supra spaeram,* beginnt mit den Worten: *Una scientia est nobilior aliis duabus de causis et melior,* und schliesst mit: *Finita est ista compilatio super mīn De spera coelesti ad maiorem introductionem scolarium Parisiis studentium, quam composuit Magister Robertus Anglicus et finivit anno domini 1271. Explicit iste liber, scriptor sit crimine liber. Deo gratias et Virgini Mariae. Iste liber fuit scriptus sive finitus anno domini 1295.* Wer war wohl dieser Meister Robert aus England, welcher 1271 zum Besten der Pariser Studenten ein Buch über die Himmelskugel vollendete? Wir sind nicht im Stande diese beiläufig aufzuwerfende Frage zu beantworten. Wir glaubten einen Augenblick in dem Verfasser den Bischof Robert von Lincoln erkennen zu dürfen. Auch er lehrte in Paris, im XIII. S., auch er wird als Robertus oder Rupertus Anglicus bezeichnet, auch er verfasste ein im Druck herausgegebenes Buch *De sphaera coelesti.* Die Identification scheitert jedoch an zwei Widersprüchen. Erstlich werden für das Buch des Bischofs von Lincoln andere Anfangsworte angegeben[293]), und wollte man auch darüber weggehen, da eine Handschrift leichtlich am Anfange einige Zeilen mehr führen kann als eine andere, wie wir erst beim Briefe des Adelboldus gesehen haben,

so wissen wir doch mit dem Widerspruche nicht fertig zu werden, dass als Todestag des Robert von Lincoln überall z. B. bei Jöcher, wo Quellen verzeichnet sind, der 9. October 1253 angegeben ist, so dass unmöglich derselbe Schriftsteller sein Buch erst 1271 beendigt haben kann. Die Geschichtsschreiber der Pariser Hochschule, bei welchen wir sicherlich Auskunft zu finden hofften, haben wir in dieser Frage vergeblich zu Rathe gezogen. Weder Boulay noch Crevier in ihren umfangreichen Werken wissen von einem Roberte, der der Zeit, der Heimath und dem Lehrstoffe nach hier gemeint sein könnte.

Wir kehren nun zu dem Stücke des Salzburger Codex zurück, in welchem die Gerbert'sche Geometrie enthalten ist, nachdem wir durch die allgemeine Beschreibung die Ueberzeugung gewonnen haben, dass hier nicht Alles mögliche zufällig nach einander abgeschrieben wurde, sondern der Hauptsache nach Gleichartiges in verhältnissmässig kurzer Zeit von einem Schreiber dem Pergamente übergeben wurde, wodurch die Glaubwürdigkeit sich in unseren Augen wenigstens wesentlich erhöht. Die Zeit der Entstehung der Handschrift ist sicherlich nach der Abfassung des ersten in ihr enthaltenen Buches und vor das Datum des Anhanges zu setzen. Da nun Herrmannus Contractus 1013—1054 lebte, so sind die äussersten Grenzen etwa 1055 und 1295. Innerhalb dieser 240 Jahre müssen wir aber bedeutend näher der oberen als der unteren Grenze uns zuwenden. Die Schrift ist, wie eine genaue Vergleichung zeigte, entschieden alterthümlicher als die des arithmetischen Codex Salamitanus der Heidelberger Universitätsbibliothek, welchen wir 1865 abdrucken liessen[294]), und welchen damals Prof. Wattenbach auf das Jahr 1200, vielleicht etwas früher, bestimmte; Tafel 22 der Arndt'schen Schrifttafeln[295]) ist dem Codex am Aehnlichsten, und diese gehört dem XII. S. an. Aus dieser Aehnlichkeit und bestimmten Formen des *s*, des *r*, des *ae*, des *de* u. s. w. ist etwa auf die Zeit von 1100 bis 1150 zu schliessen, in welcher der Codex entstanden sein mag. Ebendahin verweist ihn auch der Umstand, dass der Glossator das Rechnen nur auf dem Abacus zu kennen scheint[296]), dass also die Abacisten damals noch im un-

beschränkten alleinigen Besitze der Rechenkunst waren, und Algorithmiker noch nicht existirten. Auch das spricht entschieden für die erste Hälfte des XII. S., also etwa für eine Zeit die gute 150 Jahre später zu setzen ist als der Aufenthalt Gerbert's im Kloster Bobbio.

Damals aber, nach der endgültigen Entscheidung des Codex, glaubte man mit Bestimmtheit hier eine Geometrie Gerbert's zu besitzen. Das beweist ohne Möglichkeit der Widerrede die auf unserer letzten Figurentafel nachgebildete Ueberschrift, welche unzweifelhaft von derselben Hand wie der ganze übrige Codex herrührt und *Incipit Geometria Gerberti* lautet. Im Uebrigen bemerken wir theilweise gegen die Beschreibung von Pez [281]), dass die ersten XIII Kapitel roth geschriebene Kapitel-Ueberschriften besitzen, ferner auch XVI bis XX, XXII bis XXV und XL damit versehen sind. Alle sonstigen Kapitel-Ueberschriften sind von Pez ergänzt, während im Codex die Anfänge nur durch rothe Initialen gekennzeichnet sind. Der Text ist bei Pez genau abgedruckt, mit Ausnahme einiger Druckfehler, wie z. B. in Kapitel LVI letzte Zeile *spacio* statt *facito*. Auch entgingen Pez ein Paar geometrischer Figuren [296]).

Wir haben nun den Inhalt der Geometrie noch genauer zu prüfen und insbesondere die Textgleichungen aufzustellen, welche den Ursprung des Wissens erkennen lassen, von dem der Verfasser hier Zeugniss ablegt. Wir haben bei der vorgreifenden Inhaltsangabe mit Friedlein [278]) gesehen, dass drei Theile ganz verschiedenen Charakters in unmittelbarem Anschlusse aufeinander folgen.

Den ersten Theil bilden geometrische Definitionen und äusserst elementare Sätze über die Winkelsumme des Dreiecks, über die Möglichkeit die Frage zu entscheiden, ob ein gegebener Winkel recht, spitz oder stumpf, über das pythagoräische Dreieck, unter welchem immer ein solches verstanden wird, dessen drei Seiten in dem Verhältnisse 3 : 4 : 5 stehen; dazu kommen dann noch Maassbestimmungen, welche theilweise einander widersprechen. Das sind lauter Dinge, welche mit Ausnahme der von unseren Untersuchungen grundsätzlich ausgeschlossenen Maasstabellen wohl kaum gestatten können, fruchtbare Vergleichungen

anzustellen. Sind doch Definitionen der stylistischen Veränderung am Zugänglichsten, und umgekehrt sind auch wieder verhältnissmässig leicht an verschiedenen Orten selbstständig und unabhängig von einander in ähnlichem Wortlaute erfindbar. Die Winkel sind aller Orten recht, spitz oder stumpf, Figuren überall mit mehr oder weniger Ecken versehen u. s. w. Auch das Vorkommen des Wortes *coraustus* für Scheitellinie[233]), welches wir bei Epaphroditus als *chorauste,* bei dem Anonymus von Chartres als *coraustus* kennen gelernt haben, giebt kaum zu Vergleichungen Anlass — sein Ursprung kann vielleicht in jeder lateinischen Bearbeitung des Heron mit Ausnahme der Geometrie des Boetius gesucht werden. Nur eine Definition aus diesem Theile, genauer gesagt aus Kapitel X, ist geschichtlich verwerthbar, und von ihr muss nachher noch die Rede sein. Was aber die Elementarsätze der Planimetrie betrifft, welche hier auftreten, so machen wir nur auf Kapitel IX aufmerksam, in welchem der rechte Winkel durch das pythagoräische Dreieck geprüft wird, ähnlich wie nach der Vorschrift des Balbus[208]).

Den zweiten Theil bildet eine praktische Geometrie. Den dritten Theil werden wir unseren Lesern mit hinreichender Deutlichkeit beschrieben haben, wenn wir ihn als eine rechnende Geometrie bezeichnen.

So wesentlich verschieden diese drei Theile dem Inhalte nach sind, so kann uns darin jetzt doch keine auffallende Erscheinung mehr liegen. Was Heron seiner Zeit in griechischer Sprache vereinigte, was vielleicht seit Julius Cäsar und Augustus, spätestens seit Trajan in Uebersetzungen und Bearbeitungen in Rom als zusammengehörig Bürgerrecht erworben hatte, das blieb auch beisammen, als die heiligende Kraft der Jahrhunderte die Meinung erweckt hatte, es könne gar nicht anders sein. In diesem Vorhandensein der drei Theile sehen wir also statt einer Widerlegung nur eine Bestätigung der Einheit des Verfassers. Wir gehen so weit, dass wir, da von den meisten römischen Feldmessern nur Ueberreste der einen oder der anderen Art erhalten sind, die Behauptung zu verantworten bereit sind, es müssen wesentliche Stücke dieser Feldmesser verloren

gegangen sein. Wir haben besonders die praktische Geometrie bei dieser Bemerkung im Auge. Mit ihr beschäftigte sich der Hauptsache nach Heron's Dioptrik. Ist es nicht durchaus unwahrscheinlich, dass aus ihr, deren Anwendbarkeit im Kriege dem Römer vor Allem einleuchten, deren Aehnlichkeit mit uralt hergebrachten Uebungen ihn anheimeln musste, weniger in die lateinischen Bearbeitungen übergegangen sein sollte, als aus der rechnenden Geometrie mit ihren römischem Geiste weit fremdartigeren Formeln zur Flächenausmessung? Aus der Einleitung der Schrift des Balbus an den Celsus[297]) ist uns ferner bekannt, dass auf diesem Gebiete sogar von Fortschritten die Rede ist, welche römischen Ingenieuren zu verdanken sind, eine Bestätigung unserer Meinung von dem Ansehen, in welchem die eigentliche Feldmesskunst im Gegensatze zu der schon früher von ihr unterschiedenen Feldmesswissenschaft gestanden haben muss. Wenn nun trotzdem das, was uns an Vorschriften zu praktischen Messungen bei römischen Schriftstellern erhalten blieb, zwar nicht durchweg mit Heron's Dioptrik noch mit der spätgriechischen Bearbeitung dieser Dioptrik um das Jahr 938 durch den Anonymus von Byzanz sich deckt, und damit römische Selbstthätigkeit einigermassen verbürgt, aber doch im Ganzen dürftiger ist als das bei Heron bereits Vorhandene, gewinnen wir da nicht das Recht zur Vermuthung des Verlustes die Lücke in unserem Wissen ausfüllender agrimensorischer Schriften?

Die Untersuchung des zweiten Theiles der Gerbert'schen Geometrie ist nur geeignet neue Stützpunkte unserer Meinung zu gewähren. Vom XVI. bis zum XL. Kapitel, also in einem starken Viertheil des ganzen Werkes sind, ohne dass ein anderer Gegenstand zwischen herein behandelt würde, lauter Vorschriften gegeben, wie man Höhen, Tiefen, Entfernungen messe. Da begegnet uns, um nur Einiges zu nennen, wovon wir Nutzen zu ziehen gedenken, in Kapitel XVI eine Methode, nach welcher der Beobachter stehend und durch ein unter 45 Grad geneigtes Astrolabium visirend eine Höhe messen soll. Da lehren die Kapitel XXI und XXII, theilweise auch XXIV[298]) Höhemessungen aus dem Schatten. Da knüpft sich in dem letztgenannten Kapitel

weiter eine Methode an, bei der von der Misslichkeit eines Verfahrens gesprochen wird, welches den Beobachter zwingt, sein Gesicht platt an die Erde zu drücken, Anklänge an §. 39 des Epaphroditus. Noch deutlicher erinnert an die Methode des Epaphroditus, aber auch an die des Sextus Julius Africanus Kapitel XXXI, welches die Höhenmessung mit Hülfe des massiven pythagoräischen Dreiecks lehrt, wobei der Beobachter eben jene unbequeme Lage einzunehmen sich genöthigt sieht. Wieder eine den Hülfsmitteln nach verschiedene Höhenmessung ist die in Kapitel XXXV, welche wir die Messung mittelst der festen Stange nennen wollen, da sie darauf hinaus läuft, eine Stange von bekannter Höhe in den Boden zu befestigen und alsdann rückwärts gehend den Punkt aufzusuchen, von welchem aus die Sehlinie aus dem Auge des Beobachters nach der Stangenspitze in ihrer Verlängerung die Spitze des zu messenden Gegenstandes, eines Thurmes oder dergleichen, erreicht. Kapitel XXXVIII und XXXIX messen Flussbreiten, die Aufgabe des Nipsus[218]), wie vor ihm des Heron[48]). Kapitel XL endlich kennzeichnet sich selbst als militärische Methode zur Höhenmessung[299]). Zwei Pfeile werden, ein jeder an eine lange Schnur befestigt, gegen die Mauer abgeschossen, auf deren Höhenmessung es abgesehen ist, und zwar richtet man den einen Schuss nach der Spitze, den andern nach dem Fusse der Mauer. Die beidemal abgewickelten Schnurlängen geben Hypotenuse und Grundlinie eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Höhe zu berechnen nunmehr keine Schwierigkeit mehr hat.

Von wem sollen nun diese Aufgaben herrühren? Von dem in seiner Zelle über den Schreibtisch zusammengekauerten Mönche, der um die Mitte des XII. S. den Salzburger Codex hinmalte? Oder, wenn man mit uns Gerbert als Verfasser des ganzen Werkes annimmt, von diesem allerdings aus seiner Zeit als Riese hervorragenden Gelehrten? Die Unrichtigkeit dieser letzten Annahme streng zu beweisen, sind wir nicht im Stande, aber unserem historischen Gefühle widerstrebt sie. Reine Gefühlshistoriker sind freilich eine Gefahr für die Wissenschaft, fast so wie reine Gefühlspolitiker für den Staat, und so wollen wir wenigstens einen

Grund betonen, der nicht ohne Bedeutung scheint. Gerbert unterlässt es nicht, sein XIII. Kapitel mit den Worten einzuleiten[300]): „Ich glaube unter keiner Bedingung schweigend an Ausblicken vorbei gehen zu sollen, welche, während ich dieses schrieb, die eigene Natur mir eröffnete", und daran knüpft sich alsdann über die Verhältnissmässigkeit der Seiten und der Flächen pythagoräischer Dreiecke unter einander ein Langes und ein Breites, durch dessen Verschweigung weder Gerbert's Ruhm noch die mathematischen Wissenschaften eine Einbusse erlitten hätten. Derselbe Schriftsteller, meinen wir, würde es nicht unterlassen haben, darauf aufmerksam zu machen, er komme nun an den Vortrag lauter eigener Erfindungen, wo er die praktische Geometrie beginnt, wenn dem so wäre. Oder sollte selbst irgend ein solcher Einleitungssatz als verloren gegangen betrachtet werden, so würde bei einzelnen Aufgaben aller Wahrscheinlichkeit nach das „die Höhe u. s. w. wird gemessen" durch „ich messe" ersetzt sein. Bei der Pfeilmessung glauben wir dagegen Gerbert's Worte sogar als Citat aus einem Militärschriftsteller deuten zu müssen.

Wenn aber Gerbert hier nicht Eigenes lehrte, wessen Eigenthum waren die Aufgaben und ihre Auflösungen? Nach unserer Ueberzeugung stammt sein gesammtes mathematisches Wissen aus einem einzigen Quellensysteme, welches er in jenem Briefe an König Otto III. nennt, wo er sagt[301]): „Wahrlich etwas Göttliches liegt darin, dass ein Mann, Grieche an Geburt, Römer an Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichem Rechte nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht." Dafür könnten wir noch den Prolog, sowie den ganzen ersten Theil von Gerbert's Geometrie anführen, in welchen mit griechischen Ausdrücken förmlich kokettirt wird. Dafür wird die Nachweisung des Ursprungs fast sämmtlicher Kapitel des dritten Theiles ihr Gewicht in die Wagschale werfen. Dafür sprechen wenigstens die Aufgaben des zweiten Theiles, welche, wie wir an einzelnen Beispielen oben sehen konnten, genau den griechisch-römischen Aufgaben entsprechen. Allen diesen Erwägungen gegenüber sollten wir in stummer Resignation

vor dem Hindernisse uns aufgehalten sehen, dass hier der römische Text der Auflösungen uns fehlt? Wir können solche Entsagung nicht üben! Die Anekdote von jenem französischen Staatsanwalte ist ja bekannt genug, der bei jedem Verbrechen, das er zu verfolgen hatte, zuerst nach der Frau fragte, im Voraus überzeugt, irgend ein weibliches Wesen müsse bei der Entstehung jeder Frevelthat mitgewirkt haben, auch wo der Nachweis nicht sofort gelingt. Ihm ähnlich fragen wir immer noch: wo ist das römische Quellenwerk für den zweiten Theil der Gerbert'schen Geometrie? Es muss ein solches gegeben haben, und zwar ein solches, das, mochte der Verfasser Vitruvius oder Frontinus, Balbus oder Hyginus, Nipsus oder Epaphroditus heissen, oder einen uns heute ganz verschollenen Namen führen, zwischen 981 und 983 dem Kloster Bobbio in Oberitalien angehörte.

Dort nämlich, an dem Aufbewahrungsorte des Codex Arcerianus allein hat Gerbert den dritten Theil seiner Geometrie so schreiben können, wie er ihn geschrieben hat, und was die Zeit betrifft, so waren es ja einzig die Jahre 981 bis 983, welche er in jenem Kloster zubrachte, abgesehen vielleicht von einem späteren ganz kurzen Besuche der alten Freunde, bei welchem von ernster Arbeit kaum die Rede gewesen sein kann. Genau genommen ist somit der Beweis nur für den dritten Theil der Geometrie zu führen, aber wo dieser entstand, da wird doch wohl auch die Wiege der beiden vorhergehenden Theile zu suchen sein, sonst würden wir wieder irgend eine das im Allgemeinen unwahrscheinliche Gegentheil bezeugende Anmerkung zu erwarten haben, wie Gerbert sich ja auch in seinem bekannten Briefe an Constantinus chronologischer Notizen nicht enthält[302]. Wir haben mit diesem Uebergange uns die Pflicht auferlegt, den als möglich behaupteten Beweis wirklich zu führen, das heisst also: den dritten Theil der Geometrie in der Hand zu zeigen, dass er Nichts anderes ist als ein stylistisch abgerundeter, aber der Hauptsache nach die Reihenfolge der Sätze festhaltender Auszug aus jenem Codex, zuerst aus dem Nipsus, daran anschliessend aus dem Epaphroditus.

Dürfen wir noch ein letztes Mal einen Aufschub uns erbitten, um ein Wort über die Geschichte unserer Unter-

suchungen einzuschalten? Wir haben dieselben ohne bestimmte schriftstellerische Absicht mit einem genauen Studium der Schriften Heron's begonnen. Jeden Augenblick stiegen dabei in uns Erinnerungen an Dinge auf, welche wir in lateinischer Sprache gelesen hatten. Bemerkungen, welche wir in den Schriften Hultsch's, so weit wir sie damals kannten, also mit Ausschluss seiner Abhandlung in Ersch und Gruber's Encyklopädie, zu lesen bekamen, wiesen unsere vorher ungewiss herumtastenden Erinnerungen auf die richtige Bahn, welche uns im mündlichen Verkehre mit unserem verehrten Freunde Bretschneider, bei welchem wir im September 1874 einen Tag zubrachten, bestätigt wurde. Daraufhin begannen unsere ernsten Studien der römischen Feldmesser in der Ausgabe von 1848 und einiger anderen im zweiten Abschnitte dieses Buches analysirten Schriften. Wir kamen auf den naheliegenden Gedanken, die Spur der Agrimensoren, welche nach Chasles[303]) sich in Gerbert's Geometrie gleichfalls nachweisen lassen musste, auch dorthin genauer zu verfolgen und wieder zu versuchen, Textgleichungen aufzustellen, deren Besitz uns das Ziehen historischer Schlüsse erleichtern möchte. Da bewies uns Kap. XLII mit einem Schlage: dass Gerbert den Arcerianus benutzt habe, und zwar nothwendiger Weise in einer Zeit, welche seiner Kenntniss der Geometrie des Boetius voranging. Diese Thatsache stand jetzt für uns fest. Auf der anderen Seite wies aber eine ganze Reihe von Kapiteln aus Gerbert's Geometrie wieder auf Boetius hin, von allen uns bekannten Schriftstellern nur auf Boetius! Das war ein Widerspruch, dessen Lösung wir darin vermutheten, dass uns eben nicht alle römischen Geometer bekannt seien. Wir griffen auf's Neue zu der im zweiten Bande der römischen Feldmesser enthaltenen Beschreibung des Arcerianus und waren nicht wenig überrascht, dort[229]) von einem Aprofoditus zu lesen, der noch nicht gedruckt sei, dessen Name uns noch nie begegnet war. Von diesem Augenblicke stand eine weitere Ueberzeugung in uns fest: bei diesem, wie wir damals annahmen, im Drucke noch nie veröffentlichten Schriftsteller durften wir hoffen, Alles scheinbar dem Boetius Entnommene aus Gerbert's Geometrie zu entdecken. In

dieser Ueberzeugung mussten wir von dem Arcerianus Einsicht nehmen, und da derselbe nicht verschickt wird, gingen wir nach Wolfenbüttel, um das abzuschreiben, dessen Inhalt wir vorausbestimmt hatten. Wir haben zum vorigen Abschnitte den Text des Epaphroditus zwar nicht zum ersten Male überhaupt, aber doch zum ersten Male in verständlicher Gestalt veröffentlicht. Wir wollen jetzt sehen, dass unsere Muthmassung keine irrige war, dass der Nipsus und Epaphroditus des Codex Arcerianus die Hauptquelle von Kapitel XL bis LXXXI von Gerbert's Geometrie bilden, dass rückwärts vielleicht Gerbert's Geometrie zur Ausfüllung der Lücke führen kann, auf welche wir im Epaphroditus zwischen §. 7 und §. 8 unserer Bezeichnung hingewiesen haben.

Unsere Leser, welche die Textgleichungen hinten in den Anmerkungen[304]) etwas genauer anzusehen sich die Mühe geben, werden Dinge finden, welche nur theilweise mit unserer Meinung in Einklang stehen, theilweise eine Widerlegung derselben bilden. Neben der Aufeinanderfolge der 1., 2., 3., 5. Aufgabe des Nipsus, an welche Epaphroditus mit §. 1, 2, 3 sich anschliesst, neben der weiteren vorzugsweisen Benutzung des Epaphroditus und zwar der Reihe nach der §§. 11, 13, 7, 15, 5, 17—24, 27, 28, 30, 35, 16, 26, 14, 9 finden wir Alcuins' Aufgaben XXI bis XXXI, mit alleinigem Ausschlusse der Aufgabe XXVI von dem den Hasen verfolgenden Hunde, finden wir Heron, d. h. den von uns zugestandenen Mangel einer uns bekannten römischen Vermittelung, finden wir sogar den von uns verpönten Boetius an zwei Stellen, bei Kapitel LIV und LXIV der Gerbert'schen Geometrie. Wie können wir also uns selbst gegenüber unsere Behauptung aufrecht erhalten, Gerbert habe zwischen 981 und 983, also ohne Kenntniss der Geometrie des Boetius, welche er erst später in Mantua, wie wir wissen, erwarb, zu Bobbio sein Buch verfasst?

Kapitel XLII hat uns ursprünglich diese Ueberzeugung verschafft. Wir wollen sehen, ob es unsere Leser gleichfalls zu überzeugen im Stande ist. Dieses Kapitel bildet die fast wörtliche Abschrift der 2. Aufgabe des Nipsus mit Einschluss des seltenen Wortes *interstitio,* welches nur die hauptsächlich bei Macrobius vorkommende Form *interstitium*

angenommen hat[305]), mit Einschluss des Schreibfehlers *podismus* statt *hypotenusae podismus,* wie wir durch Vergleichung der entsprechenden Stelle des Boetius[251]) ermitteln konnten. Dass eine solche sinnentstellende Auslassung des wichtigsten Wortes genau an derselben Stelle sich in selbstständiger Weise wiederholen sollte, ist fast noch weniger zu vermuthen, als dass zwei auf's Gerathewohl abgefeuerte Schüsse genau in dasselbe kleine Loch treffen sollten. Gerbert hat mit einer der Zuverlässigkeit nahen Wahrscheinlichkeit die Aufgabe, aus der Hypotenuse und dem Flächenraume eines rechtwinkligen Dreiecks die Katheten zu berechnen, dem Arcerianus in Bobbio entnommen. Muss es aber grade bei seinem dortigen Aufenthalt gewesen sein, dass er die Geometrie schrieb? Konnte er nicht damals angefertigte Auszüge später in Deutschland, wie Hock annimmt[275]), zu einem Werke verarbeiten? Nach aller Wahrscheinlichkeit nicht. War Gerbert erst im Besitz der Geometrie des Boetius, hatte er sie, was als selbstverständlich zu erachten ist, erst studirt, so konnte ihm der Schreibfehler im Arcerianus so wenig verborgen bleiben, als er uns selbst entging. Statt dessen sucht Gerbert sich zu helfen, so gut er immer kann. Er nimmt an, das Wort *podismus* habe dieselbe Bedeutung gehabt wie *hypotenusa,* und legt diese falsche, aber eine vorher unverständliche Stelle erklärende Definition in Kapitel X nieder[306]), für uns ein neuer Beweis der Einheit des Verfassers der sämmtlichen drei Theile, und des Weiteren ein Beweis dafür, dass alle Theile gleichzeitig in Bobbio entstanden sind. Letzteres folgern wir nicht bloss aus der Definition des Kapitel X. Diese hätte nachträglich eingeschoben werden können. Wer vermag es einem Drucke, einer Abschrift anzusehen, ob diese oder jene Stelle von Anfang an so hiess, oder in einem späten Augenblicke von dem Verfasser so umgewandelt wurde, um den Einklang mit Dingen herzustellen, welche ihm erst im weiteren Verlaufe seiner Arbeit klar geworden waren? Aber das Wort *podismus* statt *hypotenusa* wird auch in Kapitel XII mehrfach angewandt[307]), und das können wir uns nicht als nachträgliche Verschlimmbesserung denken, das schrieb Gerbert offenbar im augenblicklichen Vollgefühle der vermeintlichen

zwei Kapitel früher gelungenen Entdeckung, die er sofort verwerthen wollte, und hier am Ersten verwerthen konnte, da Kapitel XII, wie beim Lesen gleich der ersten Zeilen sofort einleuchtet[308]), nicht aus fremdem Materiale zusammengeschrieben, sondern eigene Zuthat Gerbert's, des gewandten Rechners, ist.

Wenn aber diese mannigfaltigen sich gegenseitig unterstützenden Folgerungen richtig sind, wie kommt es, dass doch an zwei Stellen der Gerbert'schen Geometrie nur Boetius uns die lateinischen Parallelstellen bietet? Wir wollen die Stellen selbst befragen, vielleicht geben sie Antwort. Kapitel LIV lehrt in dem Rhombus, dessen Seite = 10, dessen eine Diagonale = 12 ist, die anderen Stücke zu finden, nämlich die zweite zur ersten senkrechte Diagonale = 16, die Fläche = 96. Genau dieselbe Aufgabe steht, wie unsere Textgleichung angiebt, in Heron's Geometrie, genau dieselbe bei Boetius. Aber Boetius schöpfte wahrscheinlich schon aus einer lateinischen Bearbeitung des Heron, die er nur neu überarbeitete. Die Möglichkeit ist also wohl vorhanden, dass Gerbert eben dasselbe ältere lateinische Werk zu Gebote stand, nach dem Glossator von Gerbert's Geometrie vielleicht Frontinus[186]); zuverlässig aber ist die hier weit knappere Fassung Gerbert's nicht aus der breiteren, schwülstigeren des Boetius entstanden. So fällt Gerbert nicht aus seinem schriftstellerischen Charakter, dass er der Klarheit zu Liebe ein einziges Wort wegliesse, er setzt stets nur hinzu! Die Schwierigkeit der einen Stelle ist somit gehoben: Gerbert und Boetius sehen sich hier nur darum gleich, weil sie einem Dritten gleich sehen.

Kapitel LXIV lehrt die Oberfläche des Berges kennen, dessen Höhe 800, dessen Umfang an dem Gipfel 300, am Fusse des Berges 1000 ist; $\frac{300 + 1000}{2} \cdot 800 = 520000$ Fuss, oder nach Theilung durch 28800 zur Umwandlung in das grössere Flächenmaass, 18 Jucharte und überdies noch 1600 Fuss bilden die Oberfläche. Genau dieselbe Rechnung, nur wieder etwas breiter stylisirt, und somit wieder als Gerbert's Quelle unbedingt zu verwerfen, finden wir bei Boetius, finden wir sonst nirgend. Sind wir darum ausser

Stande, eine wahrscheinliche Vermuthung aufzustellen, wo Gerbert die Aufgabe fand? Wir glauben nicht. Bei Boetius nämlich schliessen sich an die eben besprochene Aufgabe zwei ganz ähnliche an: die von dem Berge mit den drei Umfängen 2500, 1600 und 100 und der Höhe 500 und die von dem Berge mit den zwei Umfängen 1400 und 200 und den zwei Höhen 850 und 750. Das sind genau die Aufgaben von §. 8 und §. 9 des Epaphroditus. Wenn wir nun bedenken, dass grade vor §. 8 die Lücke sich befand, von welcher schon die Rede war, so liegt doch die Annahme sehr nahe, dass auch Epaphroditus sämmtliche drei Bergaufgaben nach einander enthielt, dass uns nur die erste derselben auf einem zerstörten Blatte verloren gegangen, dass Gerbert dagegen sie dorther noch aufnehmen konnte. Wenn wir freilich zugeben müssen, dass das Fehlen des §. 8 des Epaphroditus bei Gerbert, das Vorkommen des §. 9 erst in Kapitel LXXXI nicht zulässt unsere Conjektur gradezu als bewiesen anzuerkennen, so bleibt das immerhin gesichert: auch Kapitel LXIV liefert keinen Grund anzunehmen, Gerbert habe die Geometrie des Boetius gekannt, als er sein eigenes Werk verfasste, und somit dürfte unsere Annahme über Entstehungsort und Entstehungszeit des letzteren nicht widerlegt sein.

Wir haben darauf aufmerksam gemacht, dass Kapitel LXVII bis LXXVI der XXI. bis XXV. und der XXVII. bis XXXI. Aufgabe Alcuins in derselben Reihenfolge entsprechen. Wie verhält es sich hier mit dem Zusammenhange? Es ist nicht unmöglich, dass Gerbert die Aufgaben Alcuins, namentlich dann wenn diese Bezeichnung wirklich den Namen des Verfassers der Aufgabensammlung enthalten sollte, im Gedächtniss hatte, nachdem er selbst als Knabe in Aurillac hatte auswendig lernen müssen, als Lehrer in Rheims hatte auswendig lernen lassen, was die Schule von Tours an hergebrachten Uebungsbüchern besass. Es ist aber auch nicht unmöglich, noch mit der Autorschaft Alcuins unvereinbar, dass die Aufgaben aus einem und demselben Schriftsteller, welcher Gerbert in Bobbio zur Verfügung stand, in seine Geometrie wie früher in die Aufgaben zur Verstandesschärfung den Weg gefunden haben. Es ist

sogar nicht unmöglich, dass Epaphroditus dieser Schriftsteller war. Wir reden selbstverständlich wieder von der Lücke zwischen §. 7 und §. 8. Erinnern wir uns nur, dass §. 7 mitten im Sinne abbrechend sich mit dem Acker beschäftigt, auf welchem Bäume in gegebener Entfernung von einander gepflanzt werden sollen. Diese Aufgabe, welche allerdings etwas anders als bei Epaphroditus gelöst, nämlich ohne Berücksichtigung der Randbäume, bei Gerbert als Kapitel LIII auftritt, ähnelt sehr den bei Alcuin als XXIV, XXVII, XXVIII, XXXI bezeichneten Aufgaben. Sollten etwa, wie wir bei Besprechung Alcuin's schon andeuteten, auch diese Aufgaben an §. 7 des Epaphroditus sich anschliessend auf dem verloren gegangenen Theile gestanden haben? Freilich müsste dann die von Ebert auf ein Blatt veranschlagte Lücke grösseren Umfanges sein. Allein uns fehlen bereits so viele Dinge, welche von römischen Feldmessern bearbeitet worden sein müssen, und deren Verzeichniss sich alsbald noch vergrössern wird, dass es uns sehr wohl denkbar wäre, dass neben dem einen von Ebert vermutheten Blatte noch eine ganze Quaternion verloren ging. Diese zweite, die Lücke im Epaphroditus betreffende Conjektur, betonen wir allerdings viel leiser als die erste, ihrer grösseren Gewagtheit uns völlig bewusst, und ohne Gewicht auf dieselbe legen zu wollen. War doch die Klosterbibliothek zu Bobbio reich an literarischen Schätzen, und wenn wir auch, gestützt auf unsere Textgleichungen und die bisherigen Auseinandersetzungen als unumstösslich annehmen, dass Gerbert den Codex Arcerianus in umfassendster Ausdehnung des Wortes benutzte, so schliesst dieses keineswegs aus, dass er auch anderen derselben Bibliothek einverleibten Werken ein Gleiches widerfahren liess, wofür wir bei Besprechung des zweiten Theiles seiner Geometrie Gründe genug angegeben haben.

Römische Quellen werden vorhanden gewesen sein für alle die Gegenstände, welche bei Heron und dann für unser gegenwärtiges Wissen unvermittelt bei Gerbert erscheinen. Ausser dem schon erörterten Kapitel LIV gehören hierher Kapitel LXXVIII, LXXIX, LXXXII, LXXXIV, LXXXIX, XC, deren Parallelstellen wir bei Heron aufgefunden haben.

Fast bezüglich jedes dieser Kapitel liessen Bemerkungen der einen oder anderen Art sich anstellen, wenn wir nicht besorgten, allzu weitschweifig zu werden. Nur an Kapitel LXXXIX können wir nicht vorübergehen, ohne eine im ersten Abschnitte zugesagte Auseinandersetzung daran zu knüpfen.

Wir sahen dort, dass ganz gelegentlich in der Stereometrie, aber dadurch mit um so grösserer Bürgschaft für heronische Echtheit, die Formel

$$\left(\frac{d_8}{2}\right)^2 = \left[\sqrt{2\left(\frac{a_8}{2}\right)^2} + \frac{a_8}{2}\right]^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2$$

benutzt wird[91]), in welcher a_8 die Seite des regelmässigen Achtecks, d_8 den Durchmesser des umschriebenen Kreises bedeutet. Wieder bei Heron, aber in einem anderen Buche, finden wir eine Construktion des regelmässigen Achtecks aus dem Quadrate[309]), die darin besteht, dass die halbe Diagonale von jedem Eckpunkte des Quadrates nach beiden Seiten aufgetragen wird. Die gradlinige Verbindung jedes Schnittpunktes mit dem nächstliegenden bildet das verlangte Achteck. Ein Beweis ist weder für die Formel, noch für die Construktion erhalten, ebensowenig eine Figur, an welcher der Beweis sich wiederherstellen liesse. Wären wir nun im Stande, eine Figur zu ermitteln, welche irgend eine historische Berechtigung besässe, hier eine Rolle zu spielen, und könnten wir mit Hülfe dieser Figur die Formel wie die Construction Heron's beweisen, so wäre damit vielerlei auf einmal gewonnen. Wir hätten alsdann mit hohem Grade der Wahrscheinlichkeit die Gleichaltrigkeit, also auch die heronische Echtheit jener in verschiedenen Büchern enthaltenen Stellen, sowie die Art ihres Fortlebens nachgewiesen, wir hätten mit demselben Grade der Wahrscheinlichkeit einen alten heronischen Beweis neu entdeckt. Wir denken mit Figur 59 in allen diesen Beziehungen glücklich gewesen zu sein. Dass zwei demselben Kreise eingeschriebene Quadrate, welche sich symmetrisch durchschneiden, mittelst der Combination ihrer Seiten ein regelmässiges Achteck herstellen, ist so augenscheinlich, dass es eines Beweises gar nicht erst bedarf. Bewiesen muss nur werden, dass dabei die heronische Regel zutrifft, dass $AE = AO$,

und dass die heronische Gleichung zwischen CO und CD gleichfalls sich erfüllt. Nun ist $< AEO = \frac{3}{4}$ R. als Hälfte des Ackteckwinkels, $< EAO = \frac{1}{2}$ R. als Hälfte des Quadratwinkels, mithin $< AOE = (2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2})$ R. $= \frac{3}{4}$ R $= AEO$ und folglich in der That $AE = AO$. Ferner ist $OC^2 = OD^2 + CD^2$ und $OD = AD = AC + CD$, endlich $AC^2 = AF^2 + FC^2 = 2FC^2 = 2CD^2$, also $OC^2 = (\sqrt{2CD^2} + CD)^2 + CD^2$, welches genau Heron's Gleichung ist. Die historische Berechtigung unserer Figur besteht aber in ihrem Vorkommen bei Epaphroditus und bei Boetius in der wenig verschiedenen Gestalt, Figur 40, welche nur der Buchstaben und der 4 zum Beweise dienenden Hülfslinien OA, OC, OD, OE ermangelt. Diese Figur, so vermuthen wir, ersetzte bei dem Wissenden den leicht findbaren geometrisch strengen Beweis; ohne Beweis, ja selbst ohne den Ausspruch des Satzes bildet die Figur bei solchen, die wir darum nicht zu den Wissenden zu zählen vermögen, eine Spur der alten Erfindung. In Gerbert's Kapitel LXXXIX finden wir nun plötzlich, aber ohne Figur, ohne Beweis, ohne die Gleichung, die heronische Construktion des Achtecks wieder[310]), und von nun an scheint die Vorschrift in Handwerkskreisen sich lange erhalten zu haben. Ist es doch genau dieselbe Vorschrift, welche Günther[311]) als 4. Aufgabe der etwa um 1500 gedruckten Geometria deutsch, für uns grade rechtzeitig zur Anstellung dieser Vergleichung, der Vergessenheit wieder entzogen hat. Wir theilen vollständig die von Günther etwa dahin ausgesprochene Meinung, dass die sechs Blätter in Quart, welche die angegebene Ueberschrift führen, ein literarisches Denkmal des Bestrebens bilden, die geometrischen Normen, nach welchen das Handwerk arbeitete, gegen Verlorengehen zu schützen. Wir freuen uns durch die Rückverfolgung des einen Verfahrens durch anderthalb Jahrtausende hindurch ein Zeugniss von der fast ungeahnten conservativen Kraft solcher gesellschaftlichen Kreise ablegen zu können, welche um so zäher dem Hergebrachten anhängen, je weniger allgemeinen Werth es besitzt, je weniger sie seinen Grund einzusehen im Stande sind. Bei der Besprechung des Vitruvius haben wir vielleicht etwas Aehnliches bemerkt. Wir sagten zu, ein vorzugsweise merk-

würdiges Beispiel dieser Art noch liefern zu wollen. Wir denken unser Versprechen hiermit gelöst zu haben.

Unter den, dem Epaphroditus nachgebildeten Kapiteln sind besonders diejenigen interessant, welche den arithmetischen Aufgaben gewidmet sind: aus der Seite die Polygonalzahl, aus der Polygonalzahl ihre Seite und aus Seite und Polygonalzahl die Pyramidalzahl zu finden. Gerbert giebt nämlich die allgemeinen Formeln, welche den drei Aufgaben entsprechen, die erste in Kapitel LV, die zweite in Kapitel LXV, die dritte zweimal, in Kapitel LX und LXII, wogegen, um auch dieses nicht zu verschweigen, die Summirung der Cubikzahlen bei ihm fehlt. Hat Gerbert selbst aus den vielfachen Beispielen bei Epaphroditus die Regeln herausgelesen, natürlich nur durch Induction und ohne sie zu beweisen, wozu seine Mathematik nicht ausreichte, oder hatte er noch andere Quellenwerke zur Benutzung, in welchen er auf die allgemeine Gültigkeit hingewiesen wurde? Wir wissen kaum, für welche von beiden Annahmen wir uns entscheiden sollen. Die zweite Alternative gewinnt vielleicht dadurch etwas an Wahrscheinlichkeit, dass Boetius, wie wir uns erinnern, gleichfalls schon die erste allgemeine Formel andeutet[254]) und damit wohl auf altem Boden steht, da wir ihm den zur Verallgemeinerung immerhin nothwendigen tieferen mathematischen Geist zuzutrauen Bedenken tragen. Sei es aber damit, wie es wolle, habe Boetius, habe Gerbert die Formeln gefunden oder erfunden, jedenfalls sind sie im Salzburger Codex vorhanden, jedenfalls hat Gerbert, ein wichtiger Fortschritt, erkannt, dass es in allen diesen Aufgaben nicht um Geometrisches, sondern um Arithmetisches sich handle.

Gerbert hat einen besonderen Brief über die doppelte Ausmessung des Dreiecks geschrieben. Adelboldus konnte nicht begreifen, wie das gleichseitige Dreieck, dessen Seite die Länge 7 besitzt, ebensowohl den Flächeninhalt 28 $\left(=\frac{7 \cdot 8}{2}\right)$ als auch den Flächeninhalt 21 $\left(=\frac{7 \cdot 6}{2}\right)$ habe, und wandte sich darüber an Gerbert. Die Anfrage besitzen wir nicht mehr, aber das Antwortschreiben Gerbert's ist vorhanden

und erläutert die Sache ganz richtig. Der wirkliche geometrische Flächeninhalt, sagt er, ist 21, und er giebt dabei die Regel, die Höhe des gleichseitigen Dreiecks sei immer um $\frac{1}{7}$ kleiner als dessen Seite, eine Vorschrift, welche der Glossator des Salzburger Codex noch näher beleuchtet hat[290]). Die andere Zahl 28 sei nur arithmetisch als Fläche zu nehmen, und besage, man könne in das Dreieck 28 kleine Quadrate mit der Längeneinheit als Seite einzeichnen, freilich so, dass Ueberschüsse über das Dreieck erscheinen, wie der Augenschein am deutlichsten zeige. Figur 60.

Man hat einen Widerspruch darin finden wollen, dass derselbe Gerbert in seiner Geometrie lehre, was er in dem Briefe an Adelboldus verwerfe; daher könne Gerbert die Geometrie gar nicht verfasst haben. Dieser Einwurf ist irrig. Gerbert lehrt in seiner Geometrie, was er in seinen Musterwerken eben dort abgehandelt findet, aber er lehrt es einigermassen kritisch. So hat er bemerkt, dass die Regeln der Polygonalzahlbildung u. s. w. arithmetischer Natur sind. Er hat, viel besserer Mathematiker als irgend ein Römer es war, wieder erkannt, was in der ihm geläufigen Uebersetzung des Nikomachus durch Boetius andeutungsweise zu lesen war, während Epaphroditus, ja Boetius selbst, wie wenigstens aus ihrer Benutzung von Figur 40 am unrichtigen Orte hervorgeht, an dieser Schwierigkeit ohne Anstoss vorbeikommen, sie gar nicht zu ahnen scheinen. Dass Gerbert sich dagegen des Wechsels des Gegenstandes bewusst ist, folgern wir ebensowohl aus der bei ihm richtigen Formel für die Fünfecks- und Sechseckszahl, als auch aus dem Fehlen jeglicher Figur bei den arithmetischen Kapiteln.

Fassen wir uns also in gedrängtester Kürze zusammen, so sind die Folgerungen, welche sich uns ergeben haben, diese: Gerbert ist der Verfasser der in der Mitte des XII. S. unter seinem Namen vorhanden gewesenen Geometrie. Er hat sie in Bobbio zwischen den Jahren 981 und 983 verfasst, bevor er die Geometrie des Boetius in Mantua erworben. Er hat zu ihrer Ausarbeitung die Schriftsteller des Codex Arcerianus, namentlich Nipsus und Epaphroditus, für die beiden letzten Kapitel auch Hyginus[312]) benutzt.

Es müssen ihm noch andere Schriften römischer Feldmesser zu Gebote gestanden haben, darunter wahrscheinlich auch die Geometrie des Frontinus, welche bis zur Entstehungszeit der Glossen zum Salzburger Codex noch bekannt war. Jedenfalls ist Gerbert als unmittelbarer Schüler der Römer, als mittelbarer Schüler der Griechen, besonders des Heron von Alexandrien zu betrachten, und wir dürfen noch hinzusetzen: nur was so dem Abendlande überliefert war, bildete die Summe von dessen geometrischem, wie von dessen arithmetischem und calculatorischem Wissen, bis aus arabischen Uebersetzungen und Originalwerken andere Schriftsteller, andere Lehrgegenstände eine ganz neue Mathematik in's Leben treten liessen.

Freilich ist diese Zeit schon wenige Jahrhunderte nach Gerbert eingetreten, und es wird von da an immer schwieriger zu unterscheiden, ob Etwas griechisch-arabischen oder griechisch-römischen Ueberganges ist; freilich sind auch von den Schriftstellern, welche in dieser Beziehung zu untersuchen wären, wohl noch nicht alle im Drucke bekannt, und weitere handschriftliche Forschungen als die schon mitgetheilten, haben wir zu diesem Zwecke nicht unternommen. Vielleicht regt unsere Veröffentlichung den einen oder den anderen Fachgenossen an, neues Material an das Licht zu ziehen, welches es, wie unsere Ergebnisse zeigen, nicht zu fürchten braucht. Wir selbst haben nur aus einigen wenigen Schriftstellern noch eine kleine Aehrenlese zu veranstalten.

Herrmannus Contractus, dessen Lebenszeit wir weiter oben auf 1013—1054 angegeben haben, ist, wie gleichfalls schon erwähnt, der Verfasser einer Schrift über das Astrolabium, mit deren Abschrift der für uns so wichtige Salzburger Codex beginnt. Pez, sagten wir, hat dieses kleine Werk aus dem Salzburger Codex in demselben Bande des Thesaurus zum Abdrucke gebracht, in welchem er auch Gerbert's Geometrie veröffentlichte. Der gelehrte Herausgeber hat dabei auf drei Uebereinstimmungen aufmerksam gemacht[313]), welche wir hier in Erwähnung zu bringen für nothwendig halten. Kapitel VI und VII des zweiten Buches über den Nutzen des Astrolabiums sind einfache Abschriften der Gerbert'schen Kapitel XXII und LXXXII.

Für Kapitel III desselben Buches nennt Pez als ihm entsprechend den Anfang des Gerbert'schen Kapitel XCIII. Beide von Pez parallelisirte Stellen beziehen sich freilich auf die Messung des Erdumfanges durch Eratosthenes, aber beide Schriftsteller dürften nicht auf demselben Wege zur Kenntniss dieser Messung gelangt sein. Gerbert muss wohl aus Marcianus Capella geschöpft haben[304]), wie seine Erzählung von der Aufstellung der Sonnenuhren zwischen Siene und Meroe beurkundet, welche wir nur bei diesem Schriftsteller finden. Herrmannus Contractus dagegen scheint uns hier einen anderen Schriftsteller abgeschrieben zu haben, dessen Persönlichkeit genau zu erkennen uns gegenwärtig unmöglich ist. So viel ist jedoch sicher, wenn auch bisher unbemerkt, dass das II., III. und IV. Kapitel des genannten Buches sich wörtlich ebenso in dem einen Fragmente eines ungewissen Autors wiederfinden, welches durch Gronovius aus einem englischen Manuscripte copirt zugleich mit dem Commentare des Macrobius zum Traume Scipio's zum Abdrucke gekommen ist[314]). Jedenfalls hat der Verfasser des Fragmentes nach Macrobius gelebt, welchen er citirt, wann aber des Genaueren, und ob Herrmann ihn abgeschrieben hat, ob umgekehrt er erst den Herrmann, das getrauen wir uns nach unserer Sprachkenntniss nicht zu entscheiden. Den Anschein hat es uns freilich, als sei die Latinität des Fragmentes zu rein, um dem XI. S. anzugehören, und dann würden wir hier zwei neue Belege für die Richtigkeit der Ansicht Jourdain's haben[315]), dass Herrmann seine Schrift über das Astrolabium keineswegs aus dem Arabischen übersetzte, sondern aus in lateinischer Sprache ihm bekannt gewordenen Materialien zusammentrug. Es würde ferner für diese Kapitel sogar jegliche mittelbare Abhängigkeit von arabischer Literatur zurückgewiesen sein.

Nach diesen Zeugnissen einfacher Abschreiberei, deren der Mönch von Reichenau sich schuldig machen durfte, ohne von der Sitte seiner Zeit abzuweichen, ohne desshalb weniger als Zierde der mathematischen Wissenschaften weit und breit gerühmt zu werden, tragen wir fast Scheu zu dem genialen Pisaner uns zu wenden, der am Anfange des

XIII. S. die Musterwerke schrieb, von welchen alsdann mehr als drei Jahrhunderte eine fast sklavische Abhängigkeit zeigen. Dennoch dürfen wir Leonardo von Pisa[316]) bis zu einem gewissen Grade Schüler der Römer nennen. Er war, wie Jedermann weiss, der nur einigermassen mit geschichtlichen Vorkenntnissen versehen in die Schriften dieses grossen Mathematikers sich vertieft, ein ebensowohl leicht aufnehmender als leichtgestaltender, ein vielerfindender, aber auch ein gern lernender Geist. So haben wir im ersten Abschnitte dieses Büchleins Leonardo von Pisa im Besitze eines Verfahrens zur Zerlegung von Brüchen in Stammbrüche gesehen, welches vielleicht uralt ist. In früheren Untersuchungen über denselben Mann haben wir darauf aufmerksam gemacht, wie er an vielen Stellen seine Vorgänger, einen Euklid, einen Ptolemäus, einen Mohammed ben Moussa gradezu nennt und dadurch eine Bürgschaft für die Zuverlässigkeit auch der Angaben liefert, in welchen er irgend eine Erfindung sich selbst zuweist. Bei Stellen, an welchen er weder sein eigenes Anrecht betont, noch Vorgänger nennt, sind wir oft in der Lage, diese Letzteren leicht zu erkennen. Als wir vor 12 Jahren jene Untersuchungen anstellten, waren wir zu wenig bekannt mit den in unserer gegenwärtigen Arbeit behandelten Schriftstellern, um auch deren unverkennbare Spuren hervortreten zu lassen. Diese Lücke wollen wir jetzt ausfüllen. Leonardo bleibt immer reich genug, wenn man auch noch für Einiges, was bisher als sein persönliches Eigenthum galt, die bloss leihweise Benutzung feststellt.

Eine weiter oben angedeutete Schwierigkeit haben wir freilich hier zu fürchten. Wir sagten so eben, Leonardo habe unter Anderen den Ptolemäus benutzt. Die Thatsache ist nicht zu bezweifeln, denn wer sonst sollte der Tholomeus sein, welcher nebst seinem Almageste in der Praktischen Geometrie des Pisaners genannt ist[317])? Oder wer erkennt nicht die Figur, welche dazu dient, den Beweis zu führen, dass der Quotient zweier Sehnen kleiner ist, als der Quotient der zugehörigen Kreisbögen, als genau dieselbe wieder, der Ptolemäus sich bediente? Aber Leonardo hat den Ptolemäus schwerlich in griechischer Sprache gelesen. Dass er dessen

Werk den Almagest nennt, eine griechisch-arabisch-lateinische Verketzerung, die noch nicht so gar lange sich Bürgerrecht erworben hatte, deutet mit grösster Wahrscheinlichkeit darauf hin, dass er den alexandrinischen Schriftsteller aus arabischer Uebersetzung kennen lernte, ob unmittelbar oder mittelbar erst wieder in zweiter lateinischer Uebersetzung ist gleichgültig. Das Nämliche fand, wie wir vermuthen, für die in einem ganzen Abschnitte[318]) derselben praktischen Geometrie ihre Spuren zeigende euklidische Schrift von der Theilung der Figuren statt. Wenn wir also etwa bei Flächenausmessungen gleichfalls Zerlegungen durch Hülfslinien in einfachere Figuren vorgenommen finden, welche denen, die ein methodisch angewandtes Hülfsmittel des Heron waren, auf ein Haar gleichen, so werden wir den in erster Instanz alexandrinischen Ursprung dieses Verfahrens vermuthen dürfen, aber die Art des Ueberganges von Heron bis zu Leonardo bleibt unentschieden. Bei Gerbert durften wir mit Gewissheit annehmen: nur durch römische Uebertragung kann er mit Sätzen des Heron bekannt geworden sein, ob nun die Vermittler nachweisbar sind oder nicht. Bei Leonardo ist die Sachlage durchaus anders. Er kann römische Bearbeitungen, d. h. Schriften von Feldmessern gelesen haben. Er kann auch Heronisches in der den Arabern dienenden Uebersetzung sich angeeignet haben. Hätten wir es nur damit zu thun, zu zeigen, wie die griechische Geometrie das Mittelalter durchdringt, dann käme es freilich darauf nicht an, in welcher Lösung die färbende Masse sich ausgebreitet hat; aber um bei diesem Bilde zu bleiben, grade das Lösemittel ist uns gegenwärtig die Hauptsache, da an der Färbung längst kein Zweifel ist. Wir werden daher sehr vorsichtig sein müssen und auf die Benutzung agrimensorischer Werke durch Leonardo nur dann schliessen dürfen, wenn die Aehnlichkeit eine allzutreffende ist.

Das können wir z. B. von der Stelle behaupten, in welcher von der Ausmessung von Bergflächen die Rede ist[319]). Man vergleiche sie mit dem, was Frontinus über denselben Gegenstand sagt[193]), und man wird eine Unabhängigkeit der beiden Stellen von einander schwerlich behaupten wollen. Bei Frontinus leitet die Stelle die uns kaum fragmentarisch

12*

erhaltene Schilderung einer besonderen feldmesserischen Thätigkeit, der *cultellatio*, ein, von der wir mit anderen Fachgenossen annehmen, sie bedeute die Messung der Entfernung der Fusspunkte erhöhter Sehobjecte. Bei Leonardo wird ein demselben Zwecke dienendes Verfahren im Anschluss an die genannte Stelle sogar in zwei Methoden gelehrt. Von der ersten Methode sagt Leonardo, dass weise Feldmesser sich ihrer bedienen[320]), offenbar die Zeitgenossen dabei im Auge; die zweite Methode soll die alter Weisen gewesen sein[321]). Ist uns hier etwa das im Originale des Frontinus Verlorene in später Ueberlieferung erhalten? Die Möglichkeit dieses Zutreffens rechtfertigt sicherlich eine kurze Darstellung beider Verfahrungsarten.

Nach der ersten beginnt man (Figur 61) am Gipfel A des Berges, dessen Horizontalentfernung ED von dem Fusse D gemessen werden soll. Man hält eine Stange von bekannter Länge AB in die Luft und lässt vom Ende B der Stange ein Steinchen herabfallen, welches den Punkt D des Abhanges trifft, von welchem aus derselbe Hergang von Neuem beginnt, bis man am Fusse des Berges anlangend, die wagerechten Stangenlängen zur verlangten Summe vereinigt. Das zweite Verfahren, nach Leonardo das der alten Weisen, verlangt nur eine einmalige künstlichere Operation am Fusse des Berges. Dort in D (Figur 62) errichtet man die senkrechte Stange DC, misst von ihrer Spitze CB wagrecht bis zum Abhange, und über den Abhang hin BD. Nun wird längs des Abhanges des ganzen Berges die DA gemessen, die Aehnlichkeit der Dreiecke BCD und DEA angenommen und alsdann durch Proportion sowohl die Höhe AE als die Basis ED des Berges berechnet. Auf uns machen beide Verfahren einen so alterthümlichen Eindruck, dass wir sehr geneigt sind, die von uns gestellte Frage zu bejahen.

Wieder in einem anderen Abschnitte der praktischen Geometrie finden wir uns alten Bekannten gegenüber, vor welchen den Hut nicht lüften zu wollen übel angebrachter Stolz wäre. Wir meinen den siebenten Abschnitt von der Auffindung der Höhen über die Fläche sich erhebender Gegenstände, von den Tiefen und von der Länge der Ebenen[322]).

Die in diesem Abschnitte gelehrten Methoden sind genau dieselben wie in Gerbert's Geometrie, die Methoden der Kap. XXXV, XL, XXXI, XVI[323]), also die Methoden der festen Stange, des Pfeilschusses, des massiven hölzernen Dreiecks und des unter 45⁰ geneigten Astrolabiums, welches bei Leonardo den Namen des Horoskopes führt, ein Name, der gleichfalls bei Gerbert nur in anderen Kapiteln, z. B. in Kap. XVII und XVIII demselben Instrumente beigelegt wird. An zufälliges Zusammentreffen einander ähnlicher Erfindungen wird hier Niemand denken wollen. Wir stehen nur vor einer dreifachen Möglichkeit. Leonardo hat diese Methoden aus Gerbert oder aus einer und derselben römischen Quelle, welche auch Gerbert benutzt hatte, oder aus der Lehre der Praktiker unter seinen Zeitgenossen. Uns persönlich scheint nur die zweite und dritte Wahl in Mischung gerechtfertigt, die zweite im Hinblick auf das vorerwähnte Zusammentreffen mit Frontinus, die dritte mit Rücksicht auf die gegenwärtige Form, in welcher die meisten Methoden vorgetragen werden. Für welche Auffassung man sich aber entscheiden mag, das bleibt immer bestehen, dass zu Leonardo's Zeit noch praktische Verfahren in Italien in Uebung waren, welche seit dem X. S., wahrscheinlich schon viel länger und durch römische Feldmesser eingeführt, dem dortigen Gebrauche angehörten.

Römische Feldmesskunst tritt noch unverhüllter in einem recht späten Werke zu Tage, in dem 1489 gedruckten Buche: Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmannschaft von Johannes widmann von Eger, dessen dritter Theil der Geometrie gewidmet ist. Leider kennen wir das seltene Buch nicht aus eigenem Augenschein. Wir verlassen uns aber mit voller Zuversicht auf den vortrefflichen Auszug, den Drobisch in seinem überreichen Programme über diesen Schriftsteller gegeben hat[324]). Auf diesen Auszug verweisen wir auch unsere Leser, welche dort des Näheren auseinandergesetzt finden werden, wie bei Johannes Widmann die heronische Dreiecksformel vorkomme, die Ausrechnung der Abschnitte auf der Grundlinie, welche durch die herabgefällte Höhe des Dreiecks gebildet werden, die Berechnung des Durchmessers des dem rechtwinkligen Drei-

ecke eingeschriebenen Kreises nach der sogenannten Methode des Architas, welche wir, als in dem LIX. Kap. der Gerbert'schen Geometrie wiederkehrend, nicht besonders betont haben. Auch die Berechnung der Dreieckszahl aus der Seite, der Seite aus der Dreieckszahl lehrt Widmann, ebenso die Bildung der übrigen Polygonalzahlen, welche er mit den Flächen der Vielecke zu verwechseln scheint. Sämmtliche falsche Flächenformeln scheint Widmann sorgsam gesammelt zu haben, diejenigen, welchen wir in der Schrift über die Ausmessung der Jucharte begegnet sind[258]), die Ausmessung der Bergoberfläche nach den Methoden des Epaphroditus u. s. w. Das Wort Coraustus dagegen kommt bei Widmann, wie Drobisch ausdrücklich versichert, nicht vor, ein Grund über den eigentlichen Gewährsmann, welchem Widmann folgte, zweifelhaft zu sein, nicht aber über die Heimath des Wissens jenes Gewährsmannes, welche nirgend anders als in der Heimath der Agrimensoren gesucht werden kann.

Tritt nun gar das Wort Coraustus oder Corauscus bei einem Schriftsteller auf, so vertritt es gleichsam die Stelle einer Leitmuschel, aus welcher der Charakter der sie einschliessenden Schicht auf den ersten Blick erkannt werden kann. Solches ist der Fall bei einer ganzen Anzahl in Deutschland erschienener Druckwerke des XVI. S., von denen wir nur Eines als das älteste noch mit wenigen Worten besprechen: die Margaritha Philosophica. In diesem 1503 zuerst[325]) im Drucke herausgekommenen Sammelwerke sind zunächst in sieben Büchern die bekannten sieben freien Künste Grammatik, Dialektik und Rhetorik, Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie abgehandelt, worauf noch andere Bücher die Grundzüge der Naturwissenschaften und der Philosophie lehren, vielversprechend durch die Titelbilder der einzelnen Bücher, blutwenig leistend in den Büchern selbst, Nichts desto weniger unentbehrlich für Jeden, der eine Gesammtübersicht davon erhalten will, was man am Ende des XV. S. in Deutschland unter einem Gelehrten verstand, und ohne diese Uebersicht ist auch eine gerechte Schätzung der Leistungen bestimmter einzelner Persönlichkeiten nicht möglich. Die Form des Werkes ist durchweg die eines Zwiegespräches zwischen Schüler und Lehrer.

Meistens frägt der Erstere, worauf der Zweite die unterrichtende Antwort ertheilt, doch kommt auch das Gegentheil vor, dass der Schüler Fragen des Lehrers beantwortet. Wir haben es hier nur mit dem VI. Buche zu thun, und auch mit diesem nicht in seiner ganzen Ausdehnung. Das der Geometrie gewidmete Buch zerfällt nämlich in zwei Tractate, den ersten der speculativen, den zweiten der praktischen Geometrie. Die speculative Geometrie ist ein unendlich dürftiger Auszug aus Euklid, der Hauptsache nach Definitionen, darunter auch die der Scheitellinie[326]) enthaltend, daneben einige wenige Sätze, unbewiesen aber richtig, das ziemlich getreue Ebenbild des ersten Buches der Geometrie des Boetius nur in noch abgemagerterer Gestalt. In dem zweiten, der praktischen Geometrie gewidmeten Tractate ist nun vollends die Abhängigkeit von den Römern unverkennbar. An eine kurze Maasstabelle schliesst sich die Beschreibung eines Winkelinstrumentes nach Art des Astrolabiums an und die Vorschrift, wie man es zu Höhenmessungen zu benutzen habe, nämlich um ähnliche Dreiecke herzustellen, auf deren Berechnung Alles hinauslaufe. Als zweites wichtiges Instrument wird der Jacobsstab genannt und geschildert, bekanntermassen nach aller Wahrscheinlichkeit eine Erfindung des Regiomontanus[327]). Dann kommt die eigentliche rechnende Geometrie, um den in diesem Buche mehrfach angewandten Namen nochmals zu gebrauchen. Kreismessungen unter Annahme von $\pi = 3\frac{1}{7}$ eröffnen den Reigen. Sofort schliesst sich das gleichseitige Dreieck an mit der Trigonalzahl als Fläche und rückwärts die Berechnung der Seite aus der Trigonalzahl. Die andere sogenannte heronische Formel für das gleichseitige Dreieck

$$\Delta = a^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right),$$

oder die Gerbert'sche Formel

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{6}{7}\, a \text{ oder } \Delta = \frac{1}{2}\, a \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

kommt nicht vor. Hier ist also gar kein Zweifel mehr gestattet: die Trigonalzahl tritt nicht bloss zufällig in der Geometrie auf. Für den guten Gregorius Reysch, den

Verfasser der Margaritha Philosophica, wie für die Leser seines Werkes ist die Trigonalzahl wirklich das Flächenmass des gleichseitigen Dreiecks. Das gleichschenklige Dreieck und das ungleichseitige Dreieck folgen. Ihre Fläche wird durch das halbe Product von Höhe und Basis gefunden, und die Höhe berechnet sich nach den richtigen Formeln, welche auf Anwendung des pythagoräischen Satzes beruhen, nachdem bei dem ungleichseitigen Dreiecke die auf der Grundlinie oder deren Verlängerung gebildeten Abschnitte in heronischer Weise aufgesucht sind. Bei dem rechtwinkligen Dreiecke treten die bekannten Methoden auf, aus der ungraden Kathete $2n+1$ die Basis $\frac{(2n+1)^2-1}{2}$, die Hypotenuse $\frac{(2n+1)^2+1}{2}$, ferner den Durchmesser des Innenkreises als Rest der um die Hypotenuse verminderten Kathetensumme zu finden. Ueber das Viereck werden richtige Vorschriften für Quadrat, Rechteck, Rhombus und rechtwinkliges Trapez gegeben. Dann sehen wir wieder die Polygonalzahlen vom Fünfecke bis zum Zehnecke einzeln ausgerechnet, weiter in allgemeiner Vorschrift gelehrt als Flächenmaasse. Es folgen noch die Ausmessungen von Bergoberflächen durch Vervielfachung der Mittelwerthe von Umfang und Höhe, Weniges über Körperinhalte: damit ist die geometrische Weisheit der Margaritha Philosophica zu Ende.

Auch wir sind an dem Ziele angekommen, welches wir uns für diesen Abschnitt und damit für unsere ganze Arbeit gesteckt haben. Wir glauben trotz der Beschränkung, welche wir für das letztbesprochene Jahrhundert uns auferlegt haben, doch genügendes Material zum Beweise des Satzes dargebracht zu haben, um den es allein uns zu thun war: dass römische Form und römischer Inhalt der Geometrie sich bis zu einer Zeit herab vererbten, in welcher das zu neuem Leben erwachte griechische Alterthum, verbreitet durch Männer wie Regiomontanus, den kindisch schwach gewordenen Ueberresten den Todesstoss versetzten.

Wir haben diesem Büchlein die Ueberschrift gegeben: die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Ist es nothwendig, dass wir, aus unseren Untersuchungen ein letztes

Ergebniss ziehend, diese Stellung noch einmal bezeichnen? Wir können es mit wenigen Worten thun. Die Römer haben für die Feldmesskunst der Griechen und für unmittelbar oder mittelbar damit Zusammenhängendes, welches ihnen seit dem Beginne der christlichen Aera zufloss, eine aufbewahrende Mittelstelle abgegeben. Sie ähneln darin den Arabern, nur dass sie weniger in sich aufnahmen, entsprechend ihrer geringen mathematischen Begabung. Hinzuerfunden haben sie so gut wie Nichts, höchstens einige Operationen wirklicher Feldmesskunst. Weggelassen haben sie von dem, was sie sich angeeignet hatten, auch nicht viel; die falschen, meistens altägyptischen Näherungsformeln vor Allen haben sie niemals ausser Uebung treten lassen. Was für die Römer gilt, bleibt wahr für ihre Schüler im Mittelalter. Einzelne hervorragende Geister ausgenommen nimmt das Verständniss des Aufbewahrten immer mehr ab, aber die Menge des Aufbewahrten bleibt. Sie ist nicht gross, doch immerhin erheblicher als man sonst wohl annahm. Dass überhaupt irgend etwas von Geometrie in die wissenschaftliche Barbarei des frühsten Mittelalters hinüber sich retten konnte, das ist das unschuldige Verdienst der römischen Agrimensoren.

Anmerkungen.

1) Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica, tomo I. Bologna 1814.

2) Recherches critiques, historiques et géographiques sur les fragments d'Héron d'Alexandrie. Paris 1851.

3) Martin's klassische Arbeit (welche künftighin immer als Martin citirt werden wird) ist abgedruckt als IV. Band der Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des inscriptions et belles lettres: Série I, Sujets divers d'érudition. Paris 1854.

4) Die Arbeiten von Vincent (künftig als Vincent citirt) bestehen in dem von französischer Uebersetzung begleiteten und mit Anmerkungen versehenen ersten Abdrucke einer wichtigen Schrift des Heron von Alexandrien, einer nicht minder wichtigen des sogen. Heron von Byzanz, sowie verschiedener griechischer und lateinischer Fragmente. Sie finden sich in den Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque Impériale, Tome XIX, Partie 2. Paris 1858.

5) Die in dieser ganzen Monographie vielfach zu citirenden Schriften von Fr. Hultsch sind: 1) Die von ihm besorgte Ausgabe: Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae, Berlin 1864, citirt als Heron. 2) Seine Abhandlung: Der heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreiecks, Zeitschr. Math. Phys. Bd. IX, S. 225 – 249, citirt als Hultsch Zeitschr. 3) Seine Ausgabe der Metrologicorum Scriptorum Reliquiae in zwei Theilen, deren erster (Leipzig 1864) die griechischen, der zweite (Leipzig 1866) die lateinischen Fragmente enthält; wir citiren Script. Metrol. I und II und die besonders wichtigen Einleitungen in beide Theile als Proleg. 4) Sein Artikel: Gromatici in Ersch und Gruber's Allgemeiner Encyklopädie der Wissenschaften und Künste, Erste Section, 92. Theil, S. 97 – 105, Leipzig 1872, citirt als Hultsch Encyklop.

6) Anecdota Graeca et Graecolatina, Mittheilungen aus Handschriften zur Geschichte der griechischen Wissenschaft von Dr. Valentin Rose, Custos an der königl. Bibliothek zu Berlin. Heft I (Berlin 1864) und Heft II (Berlin 1870). Für uns ist nur das zweite Heft von Wichtigkeit. Wir citiren Rose, Anecdota II.

7) Friedlein's Untersuchungen in seiner Ausgabe der Geometrie des Pediasimus (Programm zur öffentlichen Preise-Vertheilung an der Studien-Anstalt Ansbach am 8. August 1866), citirt als Pediasimus, und

in der im Bulletino Boncompagni Jahrgang 1871 pag. 93—121 abgedruckten Abhandlung: De Heronis quae feruntur definitionibus, bei uns citirt als Friedlein, Bulletino, für welche die Vorarbeiten 1870 in der Zeitschrift für mathematischen Unterricht Bd. II, S. 173—191 und S. 277—291 erschienen.

8) Vincent pag. 167.

9) *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως Πνευματικὰ* und *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ αὐτοματοποιητικῶν* in dem Sammelwerke Veteres mathematici, herausgegeben von Thevenot, Paris 1693, welches als Vet. Mathem. citirt werden soll; der erstere Titel pag. 145, der zweite pag. 243. Ferner noch *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ διόπτρας*, Vincent pag. 174.

10) Pappus, Mathematicae Collectiones ed. Commandinus, Bononiae 1660, pag. 460 oder die Ausgabe des griechischen und deutschen Textes des VII. und VIII. Buches des Pappus von Gerhardt, Halle 1871, pag. 330, lin. 15: *Ἥρων δὲ ὁ Ἀλεξανδρεὺς κ. τ. λ.*

11) *ὡς Ἀσκρινὸς Κτησίβιος ὁ τοῦ Ἀλεξάνδρεως Ἥρωνος καθηγητὴς ἐν τοῖς ἑαυτοῦ ἐδήλωσεν* bei Martin pag. 23.

12) *Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποιικά* Vet. Mathem. pag. 121.

13) Vet. Mathem. Praefatio pag. XII—XIII und Martin pag. 22, Note 3.

14) Martin pag. 23—25. Vergl. aber auch unsere Anmerkung 32.

15) Martin pag. 91.

16) Script. Metrol. I, Proleg. pag. 9.

17) Martin pag. 29. Pappus ed. Command. pag. 447 . . . . . sentit Hero mechanicus; dagegen der griechische Text ed. Gerhardt pag. 304 lin. 14: *οἱ περὶ τὸν Ἥρωνα μηχανικοὶ* . . . .

18) Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii, ed. Friedlein, Leipzig 1873. *ὁ μηχανικὸς Ἥρων* pag. 305 und pag. 346; *ὥσπερ καὶ Κτησίβιος καὶ Ἥρων πραγματεύονται* pag. 41; *Ἥρων* pag. 196, 323 und 429. Ueber die im Texte angeführte Gewohnheit des Proklus vergl. Zeitschr. Math. Phys. XX, historisch-literarische Abtheilung S. 31 flg.

19) Martin pag. 183, 190, 195, 214.

20) Ueber Modestus vgl. Martin pag. 200, über Patrikius Martin pag. 220.

21) Spuren der *Μηχανικά* des Heron bei Pappus ed. Command. pag. 7, 9—10, 447, 450, 460, 481, 488 nach Martin pag. 29. Das wichtigste Stück (pag. 9—10), die Würfelverdoppelung behandelnd, steht aber in Heron's *Βελοποιικά* Vet. Mathem. pag. 142 und dürfte dorther in Pappus übergegangen sein, nicht, wie Martin meint, aus den *Μηχανικά*.

22) Das Kapitel des *Βαροῦλκος* bei Pappus, ed. Command. pag. 460, ed. Gerhardt pag. 330 flgg. auch bei Vincent pag. 338—347 mit französischer Uebersetzung abgedruckt, findet sich gleichlautend in Heron's *Περὶ διόπτρας* Vincent pag. 330—335.

23) Wir schliessen uns mit dieser Bemerkung im Wesentlichen einem Wunsche von Chasles an, den dieser gelegentlich am 16. Nov. 1874 (vergl. Compt. Rend. LXXIX, 1147) in der pariser Akademie der

Wissenschaften äusserte; nur gehen wir, falls es sich um eine Neuausgabe der Vet. Math. handeln sollte, darin einen Schritt weiter als er, dass wir nicht bloss das von Vincent gesammelte Material (vergl. Anmerkung 4), sondern ebenso auch dasjenige in das Gebiet Einschlagende aufgenommen wünschten, was in Rose Anecdota (vergl. Anmerkung 6) dem mathematischen Publikum gleichfalls weniger zur Hand ist.

24) Wir meinen die *χειροβαλίστρας κατασκευή* Vet. Math. pag. 115—120.

25) *Ἥρωνος Κτησιβίου βελοποιικά* Vet. Math. pag. 121—144. Die zum Kernschusse dienenden *εὐθύτονα*, Katapulten; die Wurfmaschinen *παλίντονα* oder *λιθοβόλοι*, Ballisten.

26) Hultsch Zeitschr. S. 247 flg.

27) *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ αὐτοματοποιητικῶν* Vet. Math. pag. 243—274.

28) *σωλῆνες δι' ἐφηλατῶν κανόνων.*

29) *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως Πνευματικά* Vet. Math. pag. 145—232.

30) Rose, Anecdota II, S. 299—313: Pilonis liber de ingeniis spiritualibus abgedruckt aus einem von dem Herausgeber entdeckten Londoner Codex des XIV. S.

31) Vet. Math. pag. 77, vergl. auch Martin pag. 25.

32) Vitruvius, De architectura Lib. IX, cap. 9 (edit. Valent. Rose et Herm. Müller-Strübing, Leipzig 1867) pag. 237, wo Ctesibius Alexandriae natus genannt wird, während er sonst als in Askra geboren, in Alexandrien nur ansässig bezeichnet wird.

33) Vitruvius Lib. X, cap. 12, pag. 259.

34) Was mag unter den *ὠὰ ἰατρικὰ ὑέλινα* zu verstehen sein? Schröpfköpfe, an die Jeder im ersten Augenblicke denken muss, können es nicht sein, da sie unter dem Namen *σικύα* gleich darauf genannt, also von den Glaseiern unterschieden werden.

35) Heber heisst *σίφων*, Feuerspritze *σίφωνες οἷς χρῶνται εἰς τοὺς ἐμπρησμούς.*

36) Die beiden Anwendungen des Dampfes Vet. Math. pag. 166 und pag. 202.

37) Die Beschreibung des sehr seltenen Druckwerkes, von welchem ein Exemplar der Marcusbibliothek in Venedig angehört (ein anderes Exemplar mit der Signatur V, 192 C in der grossen pariser Bibliothek nach Martin pag. 60), vergl. bei Boncompagni, Delle versioni fatte da Platone Tiburtino. Roma 1851, pag. 9—15.

38) Martin pag. 83 flgg.

39) Rose, Anecdota II, S. 293—294. Die Signatur des Erfurter Codex lautet: cod. Amplon. qu. 387.

40) Rose, Anecdota II, S. 317—330.

41) *Ἥρωνος Ἀλεξάνδρεως περὶ διόπτρας* Vincent pag. 174—337. Schon vor Vincent hatte Venturi, auch wieder in seiner Geschichte der Optik, das Werkchen übersetzt und mit einem die wichtigsten Punkte meisterhaft erledigenden Commentare versehen, welcher z. B. den Herausgebern der römischen Feldmesser (vergl. Anmerkung 121) vortreff-

liche Dienste hätte leisten müssen, wenn sie ihn gekannt hätten, eine Unkenntniss, welche aber keineswegs zum Vorwurfe gereicht, da sie auch auf die eigentlichen Fachgelehrten sich erstreckend eine ganz allgemeine war. Vincent hat die Anmerkungen Venturi's mit eigenen Zusätzen von geringerer Wichtigkeit unter dem Abdrucke jedes Paragraphen anbringen lassen.

42) Vincent pag. 180 und 181.

43) Vincent pag. 182: *Ἐν δὲ τῇ μεταξὺ τῶν ὑπεροχῶν χώρᾳ ἐναρμόζεται κανὼν πλάγιος μῆκος μὲν ἔχων ὡς πήχεις δ.*

44) Vincent pag. 186. An einer anderen Stelle (pag. 350 Note 1) giebt Vincent dagegen zu verstehen, die Glasröhrchen mit Wasser hätten auch als Stellvertreter unserer Linsen gedient, gewissermassen ein Fernrohr ersetzt. Vielleicht schwebte ihm hier die dunkle Erinnerung an eine Stelle des Seneca vor. Natur. quaest. lib. I, cap. 6: Litterae quamvis minutae et obscurae per vitream pilam aqua plenam maiores clarioresque cernuntur, nach welcher um 62 nach Chr. die vergrössernde Wirkung mit Wasser gefüllter Kugeln jedenfalls bekannt war. Vergl. Libri, Histoire des sciences mathém. en Italie T. I, pag. 56.

45) Vincent pag. 298 *Τινὲς χρῶνται τῷ καλουμένῳ ἀστερίσκῳ πρὸς ὀλίγας παντελῶς διοπτρικὰς χρείας.*

46) Vincent pag. 194: *Δύο σημείων δοθέντων ἐν ἀποστήματι τυχόντι ἐπισκέψασθαι ὁπότερον αὐτῶν μετεωρότερόν* (höher) *ἐστιν ἢ ταπεινότερον* (niedriger).

47) Vincent pag. 222, lin. 5: *χωροβατεῖν.*

48) Vincent pag. 210: *Ποταμοῦ πλάτος τῇ διόπτρᾳ λαβεῖν ἐπὶ τῇ μιᾷ ὄχθῃ ὄντας.*

49) Vincent pag. 214: *Δύο δοθέντων σημείων πόῤῥω ὁρωμένων εὑρεῖν τὸ μεταξὺ διάστημα αὐτῶν τὸ πρὸς διαβήτην καὶ ἔτι τὴν θέσιν.* Der Ausdruck *πρὸς διαβήτην* (wörtlich = nach dem Zirkel gemessen) hat hier, wie Vincent sicherlich richtig verstanden hat, die Bedeutung, dass die Entfernung der auf dieselbe Horizontalebene bezogenen Fusspunkte der beiden Punkte gesucht wird, weil in diesem Falle gewissermassen eine Zirkelabmessung erst möglich wird.

50) Vincent pag. 262: *οὕτως ὥςτε τὰς ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν ἀχθεισῶν πρὸς ὀρθὰς ἐπιζευγνυμένας ἀπολαμβάνειν γραμμὰς ἀπὸ τῆς περιεχούσης τὸ χωρίον γραμμῆς σύνεγγυς εὐθείας.*

51) *Οἱ μὲν οὖν πρὸ ἡμῶν ἐξέθεντό τινας μεθόδους δι' ὧν τοῦτο γίνεται· ἐξέσται δὲ κρίνειν τό τε ὑπὸ ἡμῶν γραφόμενον ὄργανον καὶ τὰ ὑπὸ τῶν προτέρων.*

52) Vincent pag. 319.

53) Hultsch Zeitschr. S. 229.

54) Pediasimus S. 23, Anmerkg. 69.

55) Proklus, ed. Friedlein pag. 323 und pag. 346. Die beiden kürzeren nachfolgenden Bemerkungen pag. 196 und pag. 305.

56) Martin pag. 96.

57) Script. Metrol. I. Proleg. pag. 15, nota 9.

58) Hultsch Zeitschr. S. 227—228. Als Titel vermuthet Hultsch *Γεωμετρούμενα* statt des von Martin behaupteten *Μετρικά*.

59) Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, Jahrgang 1875, S. 26—29 und S. 40—50.

60) Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, Jahrgang 1868, S. 108—110.

61) Wie richtige Gedanken oft lange Zeit hindurch unbeachtet bleiben, beweist Riemer's Kleines griechisch-deutsches Handwörterbuch. In dessen 2. Auflage (Jena und Leipzig 1816) Bd. II, S. 513 finden wir schon s. v. *πυραμίς*. „Die Griechen leiten es fälschlich von *πῦρ* ab, da es ein ägyptisches Wort pi-ra-mu-e ist." Diese letztere Abtheilung des egyptischen Wortes wird sich heute allerdings Niemand aneignen wollen!

62) R. Lepsius, Ueber eine hieroglyphische Inschrift am Tempel von Edfu. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1855. S. 69—114. Die unten angeführten Zahlenbeispiele auf S. 75, 79, 82.

63) Martin pag. 102 und 104. Die Kapitelüberschriften *τὰ πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως* und *τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως* hat er mit grossem Scharfsinne in den Heron zugeschriebenen Definitionen (*ὅροι*) entdeckt und zwar die erste in Definition 122 und 128 (Heron pag. 34 lin. 12—13 und pag. 38 lin. 1—2), die zweite in Definition 1 (Heron pag. 7 lin. 1).

64) Script. Metrol. I Proleg. pag. 15.

65) Friedlein Bulletino pag. 119—121.

66) Heron pag. 23 und 24.

67) *ποίει οὕτως*.

68) *εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων* und *εἰσαγωγαὶ τῶν στερεομετρουμένων*. Vergl. Martin pag. 225, Script. Metrol. I, Proleg. pag. 16.

69) *Γεωμετρία* Heron pag. 41—140. *Γεωδαισία* ibid. pag. 141—152. *Μετρήσεις* ibid. pag. 188—207. *Γεηπονικὸν βιβλίον* pag. 208—234. Dem Griechischen wie dem Inhalte nach scheint die Geometria am wenigsten fremde Zuthaten zu besitzen, wenn wir von einigen Anhängen (Heron pag. 136 flgg.) absehen. Die Zuverlässigkeit der drei anderen Sammlungen dürfte in dem Verhältnisse ihrer Reihenfolge abnehmen. Die stereometrischen Ueberreste (Heron pag. 153—187) sind jedenfalls sehr gemischt.

70) Heron pag. 58 (Geometria), 147 (Geodaesia), 213 (Liber Geeponicus).

71) Heron pag. 58 und häufiger, doch kommt pag. 60 (in der Geometria) auch die Formel $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ bei $a = 30$ in Anwendung. Dort wird gerechnet $a^2 = 900$, dessen Viertel 225, die Differenz 675, die Quadratwurzel 26.

72) Pediasimus S. 23, Anmerkung 70.

73) Heron pag. 61 (Geometria), 147 (Geodaesia), 213 (Liber Geeponicus).

74) Heron pag. 53 (Geometria), 144 (Geodaesia), 212 (Liber Geeponicus).

75) Vergl. die in der vorigen Anmerkung genannten Stellen. An der zuletzt angeführten Stelle des Liber Geeponicus ist so recht ersichtlich, wie unwissende Abschreiber ihre vermeintlich geistreichen Einfälle in den Text einschoben. Es handelt sich um das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 30, 40, 50 und der Fläche 600; hier ist

$$50 = \sqrt{30^2 + 40^2}.$$

Nun fährt der Text aber fort: die Hypotenuse entstehe auch folgendermassen, *σύνθες τὰς β′ πλευράς, τὰ λ′ καὶ τὰ μ′. γίνονται ο′. ταῦτα ἐπὶ ε′ τν′. τούτων τὸ ζ″ ν′*; also $50 = (30 + 40) . 5 . \frac{1}{7}$!

76) Heron pag. 56 und 57 (Geometria), 146 (Geodaesia).

77) *τρίγωνα ὀρθογώνια ἡνωμένα* Heron pag. 58 (Geometria), 147 (Geodaesia). Ueber das durch Aneinanderlegung zweier Dreiecke gebildete Dreieck von den Seiten 13, 14, 15 bei den Indern vergl. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik S. 210—211. Letzteres Buch (Leipzig 1874) citire ich künftig einfach als Hankel.

78) Die Anwendung der allgemeinen (sogen. heronischen) Formel für das *τρίγωνον σκαληνόν* bei Heron pag. 71, 108 (Geometria), 151 (Geodaesia). Den Fall der Abschnitte = *ἀποτομή*, latein. praecisura vergl. Heron pag. 56, 64 (Geometria), 149 (Geodaesia), den Fall der Ueberragung = *ἐκβληθεῖσα*, latein. eiectura vergl. Heron pag. 72 (Geometria).

79) *Ἀπὸ σκιᾶς εὑρεῖν κίονος μεγάλου ἢ δένδρου ὑψηλοῦ τὸ ὕψος κ. τ. λ.* Heron pag. 180 (Stereometrica II). Vgl. Bretschneider, die Geometrie und die Geometer vor Euklides, Leipzig 1870, S. 45.

80) Heron pag. 50 (Geometria), 142 (Geodaesia), 211 (Liber Geeponicus).

81) Heron pag. 74 (Geometria).

82) Heron pag. 52 (Geometria), 143 (Geodaesia), 212 (Liber Geeponicus).

83) Heron pag. 82 (Geometria), 220 (Liber Geeponicus).

84) Heron pag. 91 (Geometria). Wir bemerken dabei, dass *παραλληλόγραμμον* ohne Zusatz das Rechteck bedeutet, unser Parallelogramm heisst *παραλληλόγραμμον ῥομβοειδὲς οὐκ ὀρθογώνιον*.

85) Heron pag. 46 (Geometria) sind viererlei Trapeze unterschieden: *τραπεζίων θεωρήματα τέσσαρα, τραπέζιον ὀρθογώνιον, τραπέζιον ἰσοσκελές, τραπέζιον ὀξυγώνιον, τραπέζιον ἀμβλυγώνιον*. Ebenso sagt Pediasimus, es gebe *τραπέζια τέσσαρα* (S. 10 letzte Zeile). Wo später bei Heron in der Geometria pag. 98—114 unter der Ueberschrift *Περὶ τῶν λοιπῶν τετραπλεύρων σχημάτων τῶν καὶ τραπεζίων καλουμένων* von denselben ausführlich in vielfältigen Beispielen gehandelt ist, zeigt es sich, dass nur das *τραπ. ὀρθογώνιον, ἰσοσκελές* und *ἀμβλυγώνιον* Paralleltrapeze sind. Das *τραπ. ὀξυγώνιον* dagegen muss ein Viereck von der Art gewesen sein, dass die eine Diagonale der einen Seite gleich wurde, wenn aus dem einzigen dafür vorhandenen, auch bei Pe-

diasimus S. 30—31 wiederkehrenden Beispiele (vergl. daselbst Friedlein's Anmerkung 102) geschlossen werden darf, welches die Seiten 6, 5, 13, 12 und die eine Diagonale 5 in Rechnung bringt; dass dieses Viereck kein Paralleltrapez ist, ergiebt sich sofort aus den verschiedenen Höhen der beiden Dreiecke, in welche es durch die Diagonale 5 zerfällt: das Dreieck 5, 6, 5 (6 als Grundlinie) hat die Höhe 4, das Dreieck 5, 13, 12 (13 als Grundlinie) hat die Fläche 30, mithin die Höhe $\frac{60}{13}$. Das ganz unregelmässige Viereck heisst in demselben grösseren Abschnitte der Geometria *τραπέζιον ἄνισον*.

86) Martin pag. 153—154. Pediasimus S. 38, Anmerk. 124. Ueber das gleichschenklige Trapez bei den Indern, insbesondere in der Geometrie des Brahmegupta vergl. Hankel S. 213.

87) Die Dreiecksformel bei Heron pag. 207 lin. 1—5 (Mensurae), die Viereeksformel pag. 212, lin. 15—21 (Liber Geeponicus).

88) Martin pag. 154—157 und häufiger, theilweise dagegen Friedlein bei Pediasimus S. 9 Anmerk. 8. Die griechischen Wörter sind *κορυφή*, welches in grosser Häufigkeit auftritt, und *ἀμβλεῖα πλευρὰ* pag. 72, lin. 24 und pag. 108, lin. 23 beidemal in der Geometrie.

89) *μῆκος* = Höhe und grössere Dimension, *πλάτος* = Breite und kleinere Dimension, z. B. bei Heron pag. 88, wo lin. 15 und 23 der im Texte angedeutete Wechsel der Benennung eintritt; auch diese Stelle gehört der Geometria an. Ueber das egyptische ka vergl. Brugsch, hieroglyphisch-demotisches Wörterbuch S. 1435.

90) Heron pag. 134 (Geometria), 206 (Mensurae), 218, 228 (Liber Geeponicus). Auf pag. 229 findet sich auch $F_9 = \frac{15}{2} a^2_9$, doch ist dieses offenbar ein Schreibfehler, entstanden durch Verwechslung des Neunecks mit dem Zehneck.

91) Heron pag. 225 (Liber Geeponicus). Die Abweichung

$$d_8 = \frac{12}{5} a_8$$

von der im Texte mitgetheilten Regel, also statt $d_8 = \frac{8}{3} a_8$ dürfte wohl auf einem nachträglich eingeschlichenen Fehler beruhen. Der richtige Zusammenhang zwischen d_8 und a_8 auf pag. 184, lin. 10—17 (Stereometrica II).

92) Heron pag. 213 und 214 (Liber Geeponicus). Einschreiben = *ἐπιγράφειν*, umschreiben = *περιγράφειν*.

93) *Περὶ κύκλου* Heron pag. 114—122, 138 (Geometria), 200 (Mensurae), 215, 229—230 (Liber Geeponicus); *ἡμικύκλιον ἤτοι ἀψίς* pag. 123, 138 (Geometria), 216 (Liber Geeponicus); *ἴτυς* = Schildrand, d. i. ein Kreisring pag. 131 (Geometria).

94) *παρὰ δὲ Εὐκλείδῃ ὁ κύκλος οὕτως μετρεῖται κ. τ. λ.* Heron pag. 115 in der Geometria, also in der Schrift, welche allgemein als den ursprünglichsten Charakter tragend beurtheilt wird.

95) Heron (Mensurae) pag. 188 flgg. In derselben Sammlung pag. 207 wird eine Fläche als Drittel des Productes aus Umfang und Durchmesser errechnet, aber ist die Fläche eines Kreises oder etwa einer

Ellipse gemeint? Der Wortlaut beginnt στρογγύλην χώραν ἁλωνοειδῆ μετρήσωμεν οὕτως, es kommt somit darauf an, was unter tennengestaltig zu verstehen ist.

95a) Die Gründe für die Annahme des babylonischen Ursprunges des Werthes $\pi = 3$ vergl. am Schlusse unseres Referates über Oppert, L'étalon des mesures Assyriennes Zeitschr. Math. Phys. XX, histor. literar. Abtheil. S. 163 flg.

96) C. Piazzi Smyth im Athenaeum, Journal of literature, science etc. London 1873, Nro. 2394 vom 13. Septemb. 1873 pag. 335 und ganz besonders Nro. 2400 vom 25. October 1873 pag. 529. Der letztere Aufsatz schliesst mit den Worten: Errare humanum est, perseverare diabolicum.

97) Die Formel für A vergl. Heron (Geometria) pag. 125 und häufiger; die mittelbare Formel für A' auch in der Geometria pag. 126; die unmittelbare Formel für A' in den Mensurae pag. 198.

98) Die erstere Formel für B in der Geometria, Heron pag. 125, die zweite in den Mensurae, Heron pag. 199 letzte Zeile — pag. 200 lin. 9. Der dort ausgerechnete Fall geht von der besonders hervorgehobenen Voraussetzung $\frac{h}{s} = \frac{1}{4}$ aus, giebt also $\frac{1}{8}\frac{1}{8}$ $(s + h)$. Nun ist unter Zeichnung der Figur sofort ersichtlich, dass $s = 4\,h$, wenn

$$d = s + h = 5\,h,$$

d. h. wenn $B = 106^0\ 15'\ 36'',7$. Die gerechnete Bogenlänge heisst also arc. $106^0\ 15'\ 36'',7 = \frac{1}{8}\frac{1}{8}\ d$ und berechnet man daraus π, so findet sich $\pi = 3,176$.

99) Martin pag. 178—187.

100) Heron (Stereometrica I) pag. 153—156. Die Sätze über die Kugelcalotte Heron pag. 204 (Mensurae).

101) Heron (Stereometrica I) pag. 156—160. Der Kegelinhalt $= \frac{1}{3}$ Höhe mal Grundkreis; der Inhalt des Kegelstumpfes

$$= (d_1^2 + d_2^2 + d_1\,d_2)\,.\,h\,.\,\frac{11}{42},$$

wenn d_1 und d_2 die Durchmesser der beiden Grenzflächen, h die senkrechte Höhe des Stumpfes ist; Cylinder = Grundkreis mal Höhe u. s. w. Die Kegeloberfläche = dem halben Producte der Peripherie des Grundkreises in die Seite (κλίμα) des Kegels vergl. Heron pag. 203 (Mensurae).

102) Die Stellen über Pyramiden in den Stereometrica und den Mensurae mehrfach; der allgemeine Satz von Pyramide und Prisma (Stereometrica II) Heron pag. 186.

103) Heron pag. 204 lin. 21—22 (Mensurae).

104) Euklid und sein Jahrhundert, mathematisch-historische Skizze (Leipzig 1867) S. 30—32.

105) Eisenlohr in der (Anmerkung 59) genannten Zeitschrift S. 27.

106) Heron pag. 122 (Geometria). Die Namen der 4 Species bei Heron sind folgende: hinzufügen = συντιθέναι, auch wohl μιγνύναι; abziehen = ὑφαιρεῖν; vervielfachen = πολυπλασιάζειν; theilen = μερίζειν. Brüche heissen λεπτά, d. h. Geschältes, also Dünnes, Feines.

In dem hier übersetzten Beispiele ist der Durchmesser zu $16\frac{1}{3}\frac{1}{5}$ Schoinien angegeben; diese Form $\frac{1}{3}\frac{1}{5}$ statt $\frac{8}{15}$ ist offenbar gewählt, um nachher $\frac{1}{3}\frac{1}{5}$ mal 12 und $\frac{2}{3}\frac{1}{5}$ mal 16 leichter addiren zu können.

107) Vergl. auch Zeitschr. Math. Phys. historisch-literarische Abtheilung S. 68 des XX. Bandes, Leipzig 1875.

108) Zeitschr. Math. Phys. historisch-literarische Abtheilung S. 37 des XX. Bandes. Die Stelle des Leonardo von Pisa, auf welche dort verwiesen ist, und deren nähere Erläuterung wir im Texte geben, findet sich in dem Liber Abbaci des genialen Pisaners, vergl. Gesammtausgabe seiner Werke durch Prinz Bald. Boncompagni, Rom 1857, Bd. I pag. 77—83 hauptsächlich die Regula universalis in disgregatione partium numerorum pag. 82, die Hülfstabelle pag. 79.

109) *Ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἴρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς Μετρικοῖς, εἴρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην Σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου. Ὥστε οὐδὲν ἡμᾶς χρὴ περὶ τούτου ζητεῖν, ἐξὸν τοῖς φιλομαθέσιν ἐξ ἐκείνων ἀναλέγεσθαι.* Diese Stelle, welche uns beiläufig bemerkt in unserer Aufzählung griechischer Rechenmeister an dem in Anmerkg. 104 angegebenen Orte entgangen war, hat Martin zu der Anmerkg. 58 erwähnten Vermuthung bewogen, der Gesammttitel des grossen heronischen Werkes habe *Μετρικά* gelautet.

110) Die Methode des Theon von Alexandrien ist sehr klar auseinandergesetzt bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 144—147.

111) Die genauen Beispiele bei Heron pag. 65 lin. 13 und pag. 100 lin. 28; von den angenähert richtigen ist $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ aus der Fläche des gleichseitigen Dreiecks geschlossen, die anderen vier vergl. Heron pag. 92 lin. 14—15, pag. 93 lin. 6—7, pag. 94 lin. 1—2, pag. 95 lin. 27—28, wo der merkwürdigen Zahlenangabe *ωπϛʹ παρὰ ιϛʺ* gedacht sein mag. Sämmtliche Beispiele sind absichtlich der Geometria entnommen.

112) Heron pag. 167—168 (Stereometrica I) und 195 (Mensurae).

113) Heron pag. 194 lin. 1—15 (Mensurae). Vergl. Alcuini opera (ed. Frobenius 1777) II, 444, Extrait du Fakhrî (ed. Woepcke 1853) pag. 83, Lilavati (ed. Colebrocke: The algebra of the Hindoos 1817) pag. 42, Leonardo Pisano (ed. Boncompagni 1857) I, 183, Zirkel, 47 griechische Epigramme algebraischen Inhaltes aus der Anthologie übersetzt (Herbstprogramm des Bonner Gymnasiums 1853), Drobisch, De Joanne Widmanno Egerano 1840, pag. 27 u. s. w.

114) Heron pag. 133 lin. 10—23 (Geometria). Dass die Stelle dem von Hultsch mit *A* bezeichneten Codex entstammt vergl. Heron pag. 131 in der Anmerkung.

115) Heron pag. 162 lin. 14—163, lin. 16 (Stereometrica I).

116) Heron pag. 218 lin. 29—219, lin. 18 (Liber Geeponicus), vergl. das Rechenbuch des Maximus Planudes (ed. C. J. Gerhardt, Halle 1865) S. 46 Z. 9 von unten bis zum Schlusse des Werkchens S. 47 Z. 22. Die allgemeine Lösung der zweiten Aufgabe heisst in Buchstaben so: das

erste Rechteck besitzt die Seiten a und $n(n+1)a$, das zweite die Seite $(n+1)a$ und $n^2 a$.

117) Cicero, Tuscul. Quaest. Lib. I, cap. 2, § 5: In summo honore apud Graecos geometria fuit; itaque nihil mathematicis illustrius: at nos ratiocinandi metiendique utilitate huius artis terminavimus modum.

118) Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863. S. 173.

119) Cicero, De Divinatione I, 17: Lituus iste vester, quod clarissimum est insigne auguratus, unde vobis est traditus? Nempe eo Romulus regiones direxit tum quum urbem condidit.

120) C. Hase im Aprilheft 1849 des Journal des Savants pag. 139—141 bei Gelegenheit einer ausführlichen (pag. 138—151) Besprechung der in der folgenden Anmerkung citirten Ausgabe Römischer Feldmesser.

121) Röm. Feldm. I, 92 Balbus ad Celsum: At postquam primum hosticam terram intravimus statim Caesaris nostri opera mensurarum rationem exigere coeperunt. Unter Röm. Feldm. verstehen wir: Die Schriften der Römischen Feldmesser, herausgegeben und erläutert von F. Blume, K. Lachmann und A. Rudorff. Berlin 1848 und 1852, der I. Band Text und Zeichnungen, der II. Erläuterungen und Indices enthaltend.

122) Vergl. Rudorff in der Abhandlung: „Gromatische Institutionen", Röm. Feldm. II, 323—335.

123) Röm. Feldm. I, 27 Frontinus: Limitum prima origo, sicut Varro descripsit, a disciplina Etrusca und ebenda 166 Hyginus: Primum haec ratio mensure constituta ab Etruscorum aruspicum disciplina. Unter dem Worte mensure ist nur die Absteckung der Grenzen verstanden, wie aus den Anfangsworten des Abschnittes: Inter omnes mensurarum ritus eminentissima traditur limitum constitutio hervorgeht.

124) Vitruvius Lib. IV, cap. 5, pag. 96 (ed. Rose) giebt zugleich die Vorschrift, die Tempel sollen, wo möglich, gegen Westen offen sein. Dann heisst es allerdings weiter: Si secundum flumina aedes sacrae fient, ita uti Aegypto circa Nilum, ad fluminis ripas videntur spectare debere. Similiter si circum vias publicas erunt aedificia deorum, ita constituantur, uti praetereuntes possint respicere et in conspectu salutationes facere.

125) Dr. Wilhelm Abeken, Mittelitalien vor den Zeiten römischer Herrschaft nach seinen Denkmalen dargestellt. Stuttgart und Tübingen 1843. „Der Tempel" S. 202—233. Das für unsere Zwecke Wichtige schliesst der Hauptsache nach S. 211.

126) Frontinus (Röm. Feldm. I, 28), Hyginus (ibid. 167), Dolabella (ibid. 303).

127) Siculus Flaccus (Röm. Feldm. I, 153), Hyginus (ibid. 167 und 182).

128) So behauptet wenigstens Rudorff Röm. Feldm. II, 344. Die von ihm angeführte Belegstelle (Paul. ex Festo v. decimanus appellatur limes, qui fit ab ortu solis ad occasum, alter ex transverso currens appellatur cardo) enthält freilich keinerlei Unterstützung seiner Behauptung, dürfte

also wohl durch ein Versehen mit dem richtigen, nunmehr fehlenden Citate verwechselt worden sein.

129) Ueber die Aufstellung des Augurs vergl. Abeken l. c. S. 205; für die Richtung der mittelitalienischen Tempel ebenda S. 210; für die Grösse und die Namen der Abmessungen dieser Tempel ebenda S. 216 mit Berufung auf Vitruvius Lib. IV, cap. 7.

130) Vitruvius Lib. I, cap. 6, § 6 und Röm. Feldm. I, 188—191.

131) Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelkunde. Bd. XXVIII (Gotha 1813) S. 396—425: Erläuterung einer in den Scriptoribus rei agrariae pag. 176 und 177, edit. Goesii, gegebenen Vorschrift, aus drei beobachteten ungleichen Schattenlängen die Mittagslinie zu finden, von Herrn Professor Mollweide. Das Verdienst, auf diesen wichtigen und kaum gekannten Aufsatz aufmerksam gemacht zu haben, hat sich Rudorff erworben (Röm. Feldm. II, 344 Note 285). Leider hat sich dabei der Druckfehler eingeschlichen, dass statt auf den XXVIII, auf den gar nicht existirenden XXXVIII. Band der Monatl. Corresp. verwiesen ist.

132) Zu den offenbar gerechtfertigten Verbesserungen Mollweide's gehören auch die von uns hier wiederholten Figuren und auf diesen die Bezeichnung des Punktes *H* durch diesen Buchstaben, während derselbe Punkt Röm. Feldm. I, 191 Z. 5 und 6 in Anschluss an die Handschrift *A*. (codex Arcerianus) fälschlich *T* heisst. Die im Texte abgedruckte Stelle entspricht Mollweide l. c. S. 398—399.

133) Mollweide l. c. S. 409.

134) Herodot II, 109: *Πόλον μὲν γὰρ καὶ γνώμονα καὶ τὰ δώδεκα μέρεα τῆς ἡμέρης παρὰ Βαβυλωνίων ἔμαθον οἱ Ἕλληνες.*

135) Wilkinson in Rawlinson's Herodotausgabe (London 1858) meint *γνώμων* oder *στοιχεῖον* sei ein senkrechter Stab gewesen, dessen Schattenlänge die verschiedenen Tageszeiten bestimmte; *πόλος* sei eine Verbesserung jener Einrichtung, eine wirkliche Sonnenuhr gewesen. Bretschneider, die Geometrie und die Geometer vor Euklides S. 60 stimmt in Bezug auf den Gnomon nahezu mit Wilkinson überein, vermuthet aber in dem Polos etwa einen im Centrum von 6 concentrischen Kreisen lothrechten Stab.

136) Suidas s. v. *Ἀναξίμανδρος: γνώμονά τ' εἰσήγαγε.*

137) Jesaia 38, 8 und II. Könige 20, 11.

138) Vergl. über die beiden Bibelstellen und die sich anknüpfenden sprachlichen Bemerkungen Wilkinson in der erwähnten Herodotausgabe Bd. II pag. 332. Ueber griechisch-römische Sonnenuhren fährt Wilkinson in folgender Weise fort: It was very generally used till a late period, judging of the many that have been found of Roman time. It consisted of a basin, *λεκανίς*, with a horizontal *γνώμων* in the centre of one end, and eleven converging lines in the concave part divided it into the twelve hours of the day; the other dials having been marked by degrees, probably like that of Ahaz. The Greeks marked the divisions by the first twelve letters of the alphabet, and the last four

of these reading *ZHΘI* „enjoy yourself" are alluded to in this epigram, ascribed to Lucian (Epigr. 17):

> *ἓξ ὧραι μόχθοις ἱκανώταται, αἱ δὲ μετ' αὐτὰς*
> *γράμμασι δεικνύμεναι, ζῆθι λέγουσι βροτοῖς.*

Wir haben den englischen Text hier abgedruckt, weil wir keine Correktur bei der Uebersetzung vornehmen wollten und Wilkinson sich offenbar geirrt hat. Die Buchstaben *ZHΘI* nehmen entweder die 6. bis 9. oder mit Einschluss des Stigma die 7. bis 10. Stelle im Alphabete ein. Mit letzterer Annahme stimmt die gewöhnliche Zahlenbedeutung dieser Buchstaben ebenso wie der Hexameter des angeführten Epigrammes. Für dieses und seinen Verfasser dürfen wir vielleicht daran erinnern, dass Lucian es auch ist, welcher die Buchstabenbezeichnung des pythagoräischen Pentagramms und die Zusammenfassung derselben als „Gesundheit" uns überliefert hat. Vergl. Bretschneider, die Geometrie und die Geometer vor Euklides S. 85.

139) Plinius, Hist. nat. VII, 60: Princeps Romanis solarium horologium statuisse ante IX annos quam cum Pyrrho bellatum est ad aedem Quirini L. Papirius Cursor, cum eam dedicaret a patre suo votam, a Fabio Vestale proditur. Sed neque facti horologii rationem vel artificem significat, nec unde translatum sit, aut apud quem scriptum id invenerit. M. Varro primum statutum in publico secundum Rostra in columna tradit, bello Punico primo, a M. Valerio Messala consule, Catina capta in Sicilia: deportatum inde post XXX annos quam de Papiriano horologio traditur anno urbis CCCCXCI. Nec congruebant ad horas eius lineae; paruerunt tamen eis annis undecentum, donec Q. Marcius Philippus, qui cum L. Paullo fuit censor, diligentius ordinatum iuxta posuit, idque munus inter Censoris opera gratissime acceptum est.

140) Vitruvius Lib. IX, cap. 9.

141) Vergl. Abeken l. c. S. 207 wobei, wie uns scheint, mit Unrecht dem Worte tetrans die Bedeutung beigelegt ist, als sei es der Name des viereckigen Plättchens, über welches von Ecke zu Ecke visirt worden sei; was tetrans wirklich ist, darüber werden wir später uns auslassen. Die neueste Beschreibung bei Dr. C. Friederichs: Kleinere Kunst und Industrie im Alterthume (II. Band des Werkes Berlin's antike Bildwerke), Düsseldorf 1871. S. 368 „Nro. 1778 Visirstab eines Auguren (?) 1851 von Prof. Gerhard an's Museum verkauft. 3003 L. 11¾"". Dieses höchst eigenthümliche Geräthe besteht aus einem oben etwas gekrümmten Stabe, worauf ein viereckiges Plättchen mit Stiel befestigt ist. Die Art der Befestigung ist höchst eigenthümlich, es sieht nämlich aus, als ob der Stiel des Plättchens mit einem Bande angebunden wäre, es ist also eine ganz primitive Befestigungsweise in Erz imitirt. Man hat dies Instrument für ein Visirinstrument erklärt, wozu eben das Plättchen gedient habe, der Augur habe mit demselben seine sich kreuzenden Linien abvisirt. Wir müssen diese Meinung bezweifeln, weil der gekrümmte Theil des Stabes, der unversehrt ist, sich lange nicht so weit

herumbiegt, als es beim Augurstab der Fall war. Vergl. Abeken, Mittelitalien S. 207. Das Geräth, von dem Abeken spricht, befand sich zwar damals (1843) noch nicht in unserem Antiquarium, ist aber unzweifelhaft dasselbe. Es war nach Abeken früher in der Sammlung Spinelli in Neapel".

142) K. O. Müller: Die Etrusker. Breslau 1828, Bd. II S. 151 flg., Buch III, Kap. 6, § 11.

143) Paul. ex Festo v. groma appellatur genus machinolae cuiusdam, qua regiones agri cognosci possunt, quod genus Graeci γνώμονα dicunt. grumus terrae collectio minor tumulo.

144) Hygini Gromatici liber de munitionibus castrorum (ed. Lange, Göttingen 1848) pag. 72—73, cap. 12. In introitu praetoris partis mediae ad viam principalem gromae locus appellatur, quod turba ibi congruat, sive in dictatione metarum posito in eodem loco ferramento groma superponatur, ut portae castrorum in conspectu rigoris stellam efficiant. Et professores ejus artis causa supra scripta gromatici sunt cognominati. In den Anmerkungen zu dieser Stelle pag. 145—151 hat der gelehrte Herausgeber viel schätzbares Material vereinigt, um die Ansicht zu stützen, welche wir hier bekämpfen. Ebenderselben Ansicht pflichtet auch Rudorff bei Röm. Feldm. II, 336.

145) Hyginus, De limitibus constituendis: Sic et in castris groma ponitur in tetrantem qua velut ad forum conveniatur (Röm. Feldm. I, 180) und Loco plano gnomonem constituemus (Röm. Feldm. I, 189).

146) Die Sage vom Tages ausführlich bei Cicero, De Divinatione II, 23.

147) Vincent pag. 305.

148) Unsere Hauptquelle bildete die vortreffliche Zusammenstellung Rudorff's: Gromatische Institutionen, Röm. Feldm. II, 229—464, von welcher allerdings verhältnissmässig Weniges mit unserem näheren Gegenstande sich beschäftigt. Vergl. namentlich S. 253, 294, 320 flgg., 343, 345—347.

149) Frontinus, De limitibus: Postea hoc ignorantes non nulli aliud secuti; ut quidam agri magnitudinem, qui qua longior erat, fecerunt decumanum (Röm. Feldm. I, 29).

150) Abeken l. c. S. 205.

151) Mathem. Beiträge zum Kulturl. d. Völk. S. 169—170.

152) Macrobius I, 16, 39: Julius Caesar siderum motus, de quibus non indoctos libros reliquit, ab aegyptiis disciplinis hausit.

153) Unsere Hauptquelle bildet das noch unübertroffene Werk von Ludw. Ideler, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Berlin 1826. Bd. II, besonders S. 67 flg., S. 119—124 und S. 130—132.

154) Cicero ad Atticum Lib. V, epistola 21 am Schlusse des Briefes.

155) Ueber Sosigenes vergl. namentlich den von Bähr verfassten Artikel in Pauly's Realencyklopädie. Die ihm zugeschriebenen Werke führen den Titel: περὶ ὄψεως und περὶ τῶν ἀνελιττουσῶν.

156) Veröffentlicht in R. Lepsius: Das bilingue Dekret von Kanopus. Berlin 1866. Bd. I. Die Ansichten von Lepsius über die Zeit, während welcher das Dekret in Kraft blieb vergl. Einleitung S. 14.

157) Lauth, die Schalttage des Ptolemäus Euergetes I. und des Augustus (Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historichen Classe der k. b. Academie der Wissenschaften. München 1874. Heft I, S. 56—129).

158) Dümichen, die erste bis jetzt aufgefundene sichere Angabe über die Regierungszeit eines egyptischen Königs aus dem alten Reich u. s. w. Leipzig 1874. S. 17 flgg.

159) Euklid und sein Jahrhundert S. 40—41.

160) Fr. Ritschl, die Vermessung des römischen Reiches unter Augustus, die Weltkarte des Agrippa und die Cosmographie des sogenannten Aethicus (Julius Honorius) im „Rheinischen Museum für Philologie, herausgegeben von F. G. Welcker und F. Ritschl.“. Neue Folge, I. Jahrgang. Frankfurt a. M. 1842. S. 481—523. Die Stelle des Aethicus S. 486; die Namen der Feldmesser aus der Vergleichung mit dem Vaticancodex S. 489; die Zeit der Vermessung S. 494.

161) Petersen im Rhein. Museum VIII, 161—210. Frankfurt a. M. 1853. Er bezieht sich S. 163 auf Albertus Magnus, Liber de natura locorum, welches die Descriptio quae facta est ab Augusto Caesare qui primus mandavit, ut totus orbis describeretur kennt; die Namen der Feldmesser S. 178; als etwas ältere Bestätigung der Vermessung selbst eine Stelle des Dicuilus Liber de mensura orbis terrae (geschrieben 825), in welcher von der Kosmographie, die unter dem Consulate des Julius Cäsar und Marcus Antonius gemacht war, die Rede ist S. 163.

162) *Διδύμου Ἀλεξάνδρεως μέτρα μαρμάρων καὶ παντοίων ξύλων* abgedruckt Heron pag. 238—244, über die Zeit der Abfassung Script. Metrol. I Proleg. pag. 26. Von einem anderen Didymus, der als römischer Bürger unter Nero gelebt haben soll, Script. Metrol. II Proleg. pag. 23 mit Berufung auf die uns unbekannte Schrift Henr. Keil, Quaestiones grammat. pag. 10.

163) Liber Coloniarum I: Balbus Mensor, qui temporibus Augusti omnium provinciarum et formas civitatium et mensuras compertas in commentariis contulit (Röm. Feldm. I, 239). Demonstratio artis geometricae: ... iubente Augusto Caesare Balbo mensori, qui omnium provinciarum mensuras distinxit ac declaravit (Röm. Feldm. I, 402). Commentar zum Frontinus: ... qui terram metiri denuo praeceperit, sicuti Caesaris Augusti temporibus factum est (Röm. Feldm. I, 8). Martianus Capella, De nupt. philol. VI, wo die Länge der Provincia Narbonensis angegeben ist, sicuti Agrippa dimensus est.

164) Plinius, Hist. nat. III, 2: Orbem terrarum orbi spectandum propositurus erat.

165) Die Beweise sind mit ausserordentlichem Scharfsinne und reichster Materialkenntniss schon zusammengestellt bei P. S. Frandsen, M. Vipsanus Agrippa, eine historische Untersuchung über dessen Leben und Wirken. Altona 1836, besonders S. 183—195.

166) Petersen in der Fortsetzung des unter Anmerkung 161 genannten Aufsatzes im Rhein. Museum IX, 88.

167) Früher nahm man in Einklang mit dem 2. Kapitel des Evangeliums Lucas an, die Reichsvermessung unter Augustus sei von einer allgemeinen Reichsschätzung und Volkszählung begleitet gewesen. Neben theologischen Vorkämpfern hat insbesondere Huschke, Ueber den zur Zeit der Geburt Jesu Christi gehaltenen Census, Breslau 1840, diese Meinung vertheidigt, welcher auch Ritschl 1842, Petersen 1853 in den oben erwähnten Abhandlungen sich noch anschlossen. Gegenwärtig nehmen die Theologen kritischer Richtung in Einverständniss mit Geschichtsschreibern, wie Mommsen, keinen solchen Reichscensus zu jener Zeit mehr an, und leugnen insbesondere, dass er sich auf die Untergebenen eines Rex socius, wie Herodes d. Gr. es war, hätte beziehen können. Vergl. Keim, Geschichte Jesu von Nazara. Bd. I, S. 398 flgg. Zürich 1867.

168) Demonstratio artis geometricae: Nunc ad epistolam Julii Caesaris veniamus, quod ad huius artis originem pertinet, ut nec ipsius auctoris gloria pereat et nobis plenissime rei veritas ad notitiam veniat. (Röm. Feldm. I, 395).

169) Isidor von Sevilla setzt in seinen Origines I, 1 den Unterschied zwischen ars und disciplina nach griechischen Philosophen also fest: Inter artem et disciplinam Plato et Aristoteles hanc differentiam esse voluerunt dicentes, artem esse in iis, quae se et aliter habere possunt; disciplina vero est, quae de iis agit, quae aliter evenire non possunt; nam quando veris disputationibus aliquid disseritur, disciplina erit; quando aliquid verisimile atque opinabile tractatur, nomen artis habebit.

170) Für den literarhistorischen Theil dieser Untersuchungen bedienten wir uns der 2. Auflage des bekannten Werkes „Geschichte der römischen Literatur von W. S. Teuffel, Leipzig 1872“, welches wir kurzweg unter dem Namen seines Verfassers citiren. Die inzwischen (1875) erschienene 3. Auflage konnten wir noch nicht benutzen, bezweifeln aber, ob wesentliche Veränderungen der für uns nothwendigen Stellen vorgekommen sein können.

171) Teuffel S. 553—556. Ueber die von uns benutzte Ausgabe des Vitruvius vergl. Anmerk. 32.

172) Vitruvius, Lib. VI, cap. 2, § 3, pag. 139. Hoc autem sive simulacrorum impulsu seu radiorum ex oculis effusionibus uti physicis placet videmus, utraque ratione videtur ita esse uti falsa iudicia oculorum habeat aspectus.

173) Vitruvius Lib. I, cap. 6, § 2, pag. 23. Ventus autem est aeris fluens unda cum incerta motus redundantia. Nascitur cum fervor offendit umorem et impetus tactionis exprimit vi spiritus flatus. Id autem verum esse ex aeolipilis aereis licet aspicere et de latentibus caeli rationibus artificiosis rerum inventionibus divinitatis exprimere veritatem. Fiunt enim aeolipilae aereae cavae. Hae habent punctum angustissimum quo aqua infunduntur conlocanturque ad ignem, et ante-

quam calescant non habent ullum spiritum, simul autem ut fervere coeperint, efficiunt ad ignem vehementem flatum.

174) Vitruvius Lib. V, cap. 4, pag. 110 — 114 die Harmonien; Lib. IX, cap. 4—7, pag. 218—233 die Astronomie; Lib. IX, cap. 9, pag. 237 die Wasserorgel; Lib. X, cap. 12, pag. 259 die Wasserhebemaschinen; Lib. IX, cap. 1—3, pag. 213—215 die drei mathematischen Entdeckungen; Lib. I, cap. 6, § 6, pag. 25 und Lib. IX, cap. 8, pag. 233—235 die Beschreibungen des Gnomon, wobei pag. 233 der griechisch geschriebene Ausdruck πρὸς ὀρθάς für senkrecht auftritt; Lib. X, cap. 14, pag. 263—265 der Wegemesser.

175) Vitruvius Lib. VIII, cap. 6, pag. 205: Nunc de perductionibus (sc. aquarum) ad habitationes moeniaque ut fieri oporteat explicabo. Cuius ratio est prima perlibratio. Libratur autem dioptris aut libris aquariis aut chorobate, sed diligentius efficitur per chorobaten, quod dioptrae libraeque fallunt. Eine Schwierigkeit war hier für uns unlösbar. Was die Dioptra ist, wissen wir so ziemlich aus Heron. Die Chorobate beschreibt Vitruvius näher, sie entspricht unserer Wasserwage oder Libelle. Was aber ist alsdann libra aquaria?

176) Vincent pag. 314.

177) Teuffel S. 633—635. Script. Metrol. II Proleg. pag. 4, Note 1 und Hultsch Encyklop. S. 100—102.

178) Ne dubites id opus geometrarum magis esse quam rusticorum, desque veniam, si quid in eo fuerit erratum, cuius scientiam mihi non vindico.

179) Cuiusque generis species subiciemus quibus quasi formulis utemur.

180) Columella 1 = Heron pag. 49, l. 31; C. 2 = H. pag. 52, l. 4; C. 3 = H. pag. 98, l. 21; C. 4 = H. pag. 58, l. 15; C. 5 = H. pag. 53, l. 12; C. 6 = H. pag. 115, l. 3 oder H. pag. 116, l. 22; C. 7 = H. pag. 124, l. 17; C. 8 = H. p. 129, l. 9; C. 9 = H. pag. 134, l. 15. Sämmtliche Stellen Heron's gehören der Geometria an.

181) Heron pag. 134. Die wichtigen Worte: Ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ τοῦ Ἥρωνος εὑρέθη οὕτως und Ἄλλως ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ.

182) Columella Lib. III, cap. 13: Nam duas regulas eius latitudinis, qua pastinator sulcum facturus est, in speciem Graecae litterae X decussavimus, atque ita mediae parti, qua regulae committuntur, antiquam illam ciconiam infiximus, ut tanquam suppositae basi ad perpendiculum normata insisteret: deinde transversae, quae est in latere, virgulae fabrilem *libellam* superposuimus. Sic compositum organon, cum in sulcum demissum est, litem domini et conductoris sine iniuria diducit. Nam *stella*, quam diximus Graecae literae faciem obtinere, pariter imae fossae solum metitur atque perlibrat, quia sive pronum, seu resupinum est, positione machinae deprehenditur; quippe praedictae virgulae superposita libella alterutrum ostendit, nec patitur exactorem operis decipi. Der Storchschnabel, ciconia, von welchem die Rede ist, besteht aus einer senkrecht nach abwärts gerichteten eisernen Spitze, welche wirklich die Furche in das Erdreich einreisst. Columella, Lib.

IV, cap. 17: iugum in *stellam* decussari = das Feld kreuzförmig eintheilen zum Zwecke des Einsetzens junger Schösslinge der Reben.

183) Teuffel, §. 720—723.

184) Wir benutzten die Ausgabe: Julii Frontini de aquis urbis Romae libri II (ed. Franc. Buecheler, Leipzig 1858). Die im Texte genannten Röhrenberechnungen in § 39—63, pag. 18 flgg. Beispiele davon sind unter vielen Anderen: $d = 1\frac{1}{4}$, P (Peripherie) $= 3\frac{89}{96}$, $\pi = 3\frac{17}{120}$; $d = 1\frac{1}{2}$, $P = 4\frac{205}{288}$, $\pi = 3\frac{61}{432}$; $d = 2$, $P = 6\frac{5}{18}$, $\pi = 3\frac{5}{36}$.

185) Hultsch, Encyklop. S. 99, am Ende der ersten Spalte.

186) Die von uns aufgefundene Stelle gehört dem Glossator von Gerbert's Geometrie im Codex a. V. 7 des St. Peterstiftes zu Salzburg an, über welchen wir im 3. Abschnitte uns verbreiten. Die Glosse steht auf Fol. 80 verso vor Kap. 48 der Geometrie und lautet: Post triangulos primo sunt quadrati. postea quadrilateri id est partealteralongiores vel antelongiores vel rombi. postea diversae figurae trapezitarum ubi vel coraustus est brevior vel basis vel unus catetus alio. Enbadum talis quadrilateri *in frontino* docetur.

187) Chasles, Geschichte der Geometrie (deutsche Uebersetzung) S. 517—522. Vergl. dagegen Math. Beiträge z. Kulturl. d. Völker S. 171—172 und besonders S. 192—193. Die dort aufgeworfenen Fragen lassen sich leicht noch vermehren.

188) Mommsen, die Libri coloniarum in Röm. Feldm. II, 145—220, besonders zu vergleichen S. 174—179.

189) Ueber das Alter des Arcerianus vergl. Math. Beitr. z. Kulturl. d. Völk. S. 174 und die dort angeführten Schriftsteller: Blume und Lange.

190) Röm. Feldm. I, 64: Uno enim libro instituimus artificem, alio de arte disputavimus. Vergl. Lachmann in den Röm. Feldm. II, 117, welcher Ansichten entwickelt, die mit unserer freien Uebersetzung des Titels übereinstimmen. Eine, wie es scheint, noch nicht bemerkte Parallele erkennen wir bei Vitruvius, der am Anfange seines II. Buches auch einen vorbereitenden Unterricht des Künstlers von der Lehre der Kunst selbst unterscheidet: Vitruvius Lib. II, cap. 1, § 8, pag. 36: Quid oporteat esse in architecto ibi pronuntiavi; ergo in primo de artis officio, in hoc de naturalibus materiae rebus quem habeant usum disputabo. Namque hic liber non profitetur unde architectura nascatur, sed unde origines aedificiorum sint institutae etc.

191) Jul. Frontinus, De limitibus Röm. Feldm. I, 26—34. Vergl. dazu Hultsch Encyklop. S. 99: „Zur möglichsten Sichtung der Ueberlieferung möge aber der mir unzweifelhafte Hinweis dienen, dass das Bruchstück S. 31 Z. 12 bis S. 34 Z. 13 nach Styl und Inhalt nicht der Schrift Frontin's angehört“; und ebenda S. 105: „Unter den Auszügen aus Frontin befindet sich ein Stück, welches wir bereits oben als Frontin nicht angehörig bezeichneten. Damit sollte jedoch dieses Fragment de arte mensoria . . . nicht etwa als werthlos bezeichnet werden.“

192) Vincent pag. 264. Röm. Feldm. II, 31 flg. also grade die von Hultsch als anonym betrachtete Stelle.

193) Cultellandi ratio quae sit, saepe quaeritur, cum perpenso soli spatium consummamus, ut illam clivorum inaequalitatem planam esse cogamus, dum mensurae lateribus inseruimus [cultellamus ergo agrum eminentiorem, et ad planitiam redigimus inaequalitatem] hanc nobis ipsa seminum natura monstravit: omnis enim illa soli inaequalitas quare colligi poterit, nisi quod e terra quidquid nascitur in aëre rectum existit et illam terrae obliquitatem crescendo adterit, nec maiorem numerum occupat quam si ex plano nascatur? quod si monti ordinata semina nascerentur omnia, secundum loci naturam metiremur: cum mons totidem arborum ordines capiat quot pars eius in campo, lineis recte cultellabitur. Röm. Feldm. I, 27 mithin nicht zu der von Hultsch angezweifelten Stelle gehörig.

194) Teuffel S. 773—775, über den oder die älteren Schriftsteller, welche den Namen Hyginus führen ebenda S. 546—551.

195) Script. Metrol. II Proleg. pag. 6.

196) Mollweide l. c. S. 409 Anmerkung.

197) Röm. Feldm. I, 208: Intra has strigas et scamna omnem agrum separavimus cuius totam positionem ad verum formatam inspiciemus, secundum quod rei praesentis formam describamus. Daz. Fig. 205 desselben Bandes. Vergl. Vincent pag. 265.

198) Röm. Feldm. I, 193 und Figur 173 desselben Bandes. Vincent pag. 218. Venturi irrt nur darin, dass er die zweite Methode Heron's statt der ersten bei Hyginus zu erkennen glaubt, ein so ungeheures Missverständniss, dass wir es nur einem Druckfehler zuschreiben können. Venturi's Text lautet, wie folgt: Sit ergo forma conspectus *ABCD*. Nunc ex linea primum constituta, quae est inter *B* et *D*, conspiciamus signum *A*; ex *B* prolato per exiguum rigorem *BE* ferramento normaliter paucas dictabimus metas ex signo *E* per *EG*. Prolato iterum exiguum ferramento in signum *F*, signum *A* conspiciemus, ita ut rigorem ex *F* missum ad *A* secet signum *G*; et quicumque numeri fuerint sic observabimus: quomodo fuerit *EF* ad *EG* sic et *FB* ad *BA* tractabimus: erit haec longitudo conspectus inter *B,A*. Eadem ratione et alteram partem *DC* conspiciemus [exempli gratia ex *MNO*]. Quanto deinde *CD* longior fuerit quam *AB* signo *H* notabimus, et ex hoc signo in *B* rectam lineam iniungemus *HB*, quae erit ordinata *AC*.

199) Es ist ein geradezu unbegreifliches Versehen, wenn Hankel S. 299 sagt: „Nirgends finden wir die eleganteren, genaueren Methoden Heron's, welche die gesuchten Grössen nicht mittels congruenter, sondern ähnlicher Dreiecke bestimmen und somit wenigstens die Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren und die Rechnung mit Proportionen als bekannt voraussetzen.“ Die Einschränkung in der Anmerkung „Nur in den von Vincent publicirten anonymen Fragmenten, deren Ursprung ganz unbekannt ist, werden ähnliche Dreiecke benutzt“ bezieht sich nämlich nicht auf einen bekannten römischen Feldmesser, sondern auf Gerbert's Geometrie.

200) Röm. Feldm. I, 93: Postquam ergo maximus imperator victoria Daciam proxime reseravit, statim ut e septentrionali plaga annua vice

transire permisit ego ad studium meum tamquam ad otium sum reversus et multa velut foliis et sparsa artis ordini inlaturus recollegi. Ueber das Datum vergl. Mommsen Röm. Feldm. II, 147 und 180, sowie Hultsch in den Script. Meteor. II Proleg. pag. 6, Note 5, wo die Zeit in die noch engeren Schranken 102 und 106 verlegt wird.

201) Einige Hypothesen über die Persönlichkeit des Celsus bei Mommsen Röm. Feldm. II, 148. Die Zeugnisse des Balbus über ihn Röm. Feldm. I, 91: Notum est omnibus, Celse, penes te studiorum nostrorum manere summam, ideoque primum sedulitatis meae impendium iudiciis tuis offerre proposui. nam cum sibi inter aequales quendam locum deposcat aemulatio neminem magis conatibus nostris profuturum credidi quam qui inter eos in hac parte plurimum possit und ebenda 93: ideoque rerum ad professionem nostram pertinentium, in quantum potui occupatus, species, qualitates, condiciones, modos et numeros excussi. per que satis ampla mediocritatis meae opinio servabitur, si illa vir tantae auctoritatis studentibus profutura iudicaveris.

202) Christ, Ueber das argumentum calculandi des Victorius und dessen Commentar (Sitzungsberichte der königl. baierischen Academie der Wissenschaften zu München, Jahrgang 1863, Bd. I, S. 100—152, die hier angezogene episodische Stelle S. 106). Die weitergehenden Folgerungen von Hultsch Script. Meteor. II Proleg. pag. 14—16. Der Abdruck der Schrift De asse gleichfalls Script. Meteor. II, pag. 72—75.

203) Mommsen's Uebersetzung Röm. Feldm. II, 149, Belegstellen aus Hyginus, Siculus Flaccus u. s. w. ebenda 152. Frontinus, De aquis I, 17, pag. 11: *Formas* quoque ductuum facere curavimus, ex quibus adparet ubi valles quantaeque, ubi flumina traicerentur, ubi montium lateribus specus adplicitae maiorem adsiduamque tuendi ac muniendi rivi exigant curam. Balbus Röm. Feldm. I, 98: Quidquid in agro mensorii operis causa ad finem rectum fuerit, rigor appellatur; quidquid ad horum imitationem *in forma* scribitur linea appellatur. Dagegen Balbus ebenda 104: *Forma est quae sub aliquo aut aliquibus finibus continetur*, womit man vergleichen mag die 25. Definition Heron's pag. 14 lin. 18: *Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.* Endlich die in der Hauptsache mit uns übereinstimmenden Ansichten von Hultsch Script. Meteor. II Proleg. pag. 10—11.

204) Röm. Feldm. II, 149, Note 7.

205) Hultsch Encyklop. S. 105 erster Absatz der zweiten Spalte; überhaupt enthält diese Abhandluug von S. 102 am Schlusse an sehr schätzbare Bemerkungen über Balbus, deren eine wir uns wörtlich aneignen und durch Bezugnahme auf diese Anmerkung bezeichnen werden.

206) Nach Martin pag. 136 kommt in einer Handschrift vor: *Ἀρχὴ τῆς μετρήσεως τῶν σχημάτων*, in einer anderen: *Ἀρχὴ τῶν σχημάτων τῆς γεωμετρίας.*

207) Ueber die Definition von Figur vergl. Anmerkung 203. Ferner Heron Defin. 1: *σημεῖόν ἐστι . . . πέρας γράμμων.* Balbus: lineae autem fines signa. Heron Defin. 2: *γραμμὴ δέ ἐστι μῆκος ἀπλατὲς καὶ ἀβαθές.* Balbus: Linea est longitudo sine latitudine. Heron Defin. 9: *ἐπι-*

φάνειά ἐστιν ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. Balbus: Summitas est secundum geometricam appellationem, quae longitudinem et latitudinem tantummodo habet. Heron Defin. 11: *ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.* Balbus: Plana summitas est quae aequaliter rectis lineis est posita. Heron Defin. 71: *παράλληλοι δὲ καλοῦνται γραμμαὶ ἀσύμπτωτοι ὅσαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἑκάτερα μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.* Balbus: ordinatae rectae lineae sunt quae in eadem planitia positae et eiectae in utramque partem in infinitum non concurrunt. Die Stellen des Balbus Röm. Feldm. I, 98—99.

208) Röm. Feldm. I, 108: Nam quod ad extremam lineae normationem pertinet, vulgaris consuetudinis est sex octo et decem: haec de qua supra disputavimus circuli ratio magis artificialis est, quae numeros non praefinit; habemus enim apud Euclidem, quocumque loco ad circumferentem lineam ex signis dimensionis duae lineae concurrerint, normam facturas.

209) Vincent pag. 220.

210) Script. Metrol. II, Proleg. pag. 9, Note 8, ist $\triangle i$ als Abkürzung für trianguli erkannt, während man bis dahin sich vergebens mit dieser Zeichengruppe abgequält hatte. Eine andere in demselben Bruchstücke der Einleitung an Celsus verwerthete scharfsinnige Bemerkung von Hultsch (Script. Metrol. II Proleg. pag. 8, Note 4) besagt, dass acies hier nicht etwa Heer, sondern Schärfe der Augen, Visiren bedeute.

211) In Benseler's neuester Ausgabe von Pape's Wörterbuche der griechischen Eigennamen (Braunschweig 1863—1870) finden wir: *Νύψιος* ὁ (viell. sicil. = *Νύσφιος*. s. Ahr. Dial. II, 29 von *νῦσος* also Hinke) aus Neapolis Strateg des älteren Dionysios D. Sic. 16, 18. 19. Plut. Dion. 41. 44. — Martin pag. 221. Malheureusement l'époque de Junius Nipsus ne peut être fixée. — Teuffel S. 1019. — Hase im Journal des Savants für April 1849, pag. 249 in der Note. Ueber den Namen, dessen gleichfalls vorkommende Schreibweise Nypsus er für durchaus falsch hält, sagt Hase: Il n'y a qu'un grammairien Grec nommé Theognoste qui, dans un ouvrage intitulé *Canones* (pag. 77, 2) cite le mot *Νίψος* sans autre explication; voyez la nouvelle édition du Thesaurus de Henri Estienne que je publie conjointement avec MM. Dindorf vol. V, col. 1530, D.

212) Röm. Feldm. I, 295—301. Ueber den Erfurter Codex, welchem S. 296 entnommen ist (Bibliothecae Amplonianae No. 362, angebunden an die Tabulae illustris regis Alphonsi) vergl. Blume, Röm. Feldm. II, 56.

213) Die hypotenusa minor heisst bei Heron *ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀμβλεῖα πλευρὰ* etwa „die stumpfe Senkrechte", und dass der Römer für diesen ungeschickten Ausdruck einen anderen wählte, ist ihm nicht zu verargen.

214) Das Dreieck 15, 20, 25 bei Heron pag. 57 lin. 22; hortogonium = *ὀρθογώνιον*, embadum = *ἔμβαδον* u. s. w. Die Differenz heisst

interstitio, was freilich zu λοιπός, dem Heronischen Worte für Rest, nicht passen will. S. Q. = sic quaeres entspricht dagegen wieder genau dem ποίει οὕτως (vergl. Anm. 67).

215) Wir würden den pythagoräischen Lehrsatz gar nicht besonders hervorheben, ohne das Versehen Hankel's S. 296, wonach den römischen Feldmessern dieser Satz fast unbekannt gewesen sei; er komme nur bei Boetius (ed. Friedlein p. 405 flgg.) vor!

216) Heron pag. 64 lin. 11—18 (Geometria). Die Figur befindet sich Röm. Feldm. I Tafel 29 als Fig. 216 (rectius 219).

217) Heron pag. 56 lin. 17 bis pag. 57 lin. 2.

218) Fluminis varatio Röm. Feldm. I, 285—286 vergl. Vincent pag. 212; eine französische Uebersetzung von J. B. Biot im Journal des Savants für April 1849, pag. 247, mit welcher wir im Allgemeinen einverstanden sind. Das zweite Kapitel Limitis repositio Röm. Feldm. I, 286—295 vergl. Vincent pag. 272. Die wichtigste Verbesserung, nämlich pag. 288 lin. 13 und 17, und 289 lin. 26 in diagonio statt item zaconem, statt in zacone und statt in zacono zu lesen, rührt von Vincent selbst her, und ist leider den Herausgebern der Röm. Feldm. unbekannt geblieben.

219) Vergl. Hankel S. 299, der in Bezug auf diese eine Stelle mit seiner Bemerkung Recht hat, so wenig zutreffend sie im Allgemeinen ist.

220) Teuffel, S. 862—863. Math. Beitr zum Kulturl. der. Völk. S. 165 flgg. Martin S. 343 flgg.

221) Friedlein hat im Bull. Boncomp. 1868, pag. 49—50 gegen die von uns früher vertretene Ansicht offenbar richtig hervorgehoben, dass jene Fackeltelegraphie den Zweck hatte Buchstaben, also im Zusammenhang derselben Worte mitzutheilen, so dass jeder Buchstabe durch die seinem Zahlenwerthe entsprechende Fackelmenge an der richtigen Rangstelle bezeichnet wurde. Dagegen irrte Friedlein darin, dass er die Anwendung des Positionswerthes dabei verkannte.

222) Vincent, pag. 407—415. Der von ihm verbesserte Text ist von einer vortrefflichen französischen Uebersetzung begleitet.

223) Heron, pag. 136: Προςθήκη Πατρικίου λαμπροτάτου θεωρήματος wo 3 und pag. 207 lin. 16—20, wo 4 Breiten gemessen werden.

224) Heron, pag. 159: Ἡ τοῦ κίονος ἔκθεσις τοῦ αὐτοῦ Πατρικίου διόρθωσις· οἱ γὰρ ἀρχαῖοι τὰς δύο διαμέτρους ουκ ἔμιξαν. Die Formel des Patrikios heisst $h \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_u + d_o}{2}\right)^2$, die richtige Formel

$$h \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d_u^2 + d_u \, . \, d_o + d_o^2}{3},$$

wo d_u den unteren, d_o den oberen Durchmesser bedeutet.

225) Heron, pag. 157 lin. 16—23 ist die falsche Formel an einem Kegelstumpfe, ebenda lin. 24 bis pag. 158 lin. 4 die richtige Formel an einem anderen Kegelstumpfe benutzt, letztere durch ἄλλως eingeleitet. Ferner Heron, pag. 178 und 179 die Bestimmung des Inhaltes eines Fasses πίθος mit Hülfe eines Mittelkreises, dessen Durchmesser

auch die Hälfte zweier gemessener Durchmesser ist. Ebenso die Berechnungen der Kufe κοῦπα, der Butte βοῦτις auf pag. 170 u. s. w.

226) Dass es eine altegyptische Nährungsformel $1\frac{1}{2} \cdot h \cdot d_o{}^2 \cdot \frac{\pi}{4}$ gab, hat Eisenlohr aus dem Papyrus Rhind in der Zeitschrift f. egypt. Sprache und Alterth. 1875, S. 49 hervorgehoben, sowie, dass diese Formel ziemlich richtig sei, wenn $d_u = 1\frac{1}{2}\, d_o$. Unter derselben Voraussetzung stimmt aber auch die Formel $\left(\frac{d_u + d_o}{2}\right)^2 = 1\frac{9}{16}\, d_o{}^2$ ziemlich genau mit dem altegyptischen $1\frac{1}{2}\, d_o{}^2$ überein.

227) Das, wie es scheint, sehr seltene Buch, wovon um 1812 ein Exemplar der der Berl. Bibliothek einverleibten Spanheimer'schen Sammlung angehörte, ist ein 1616 in Antwerpen gedruckter Quartband, enthaltend: Tabulae rei Nummariae Romanorum Graecorumque ad Belgicam, Gallicam, Hispanicam et Italicam monetam revocatae. Ex Gui. Budaeo, Agricola et Ciaconnio pag. 22. — Tabula anomalorum verborum Graecorum ad investigandum difficilium pag. 14. — Tabula mensium Romanorum et Atticorum pag. 16. — Geometrica et gromatica vetusti scriptoris. Ex antiquissimis nunc demum membranis eruta studio Andr. Schotti Antverpiani. S. J. pag. 3—17. Wir selbst haben den Sammelband nicht gesehen. Wir entnehmen nur diese Notiz dem in der folgenden Anmerkung genannten Buche.

228) Epistolae Parisienses in quibus de rebus variis, quae ad studium antiquitatis pertinent, agitur, editae a. G. G. Bredow. Lipsiae MDCCCXII. Der 13. Aufsatz dieser Sammlung rührt von C. B. Hase her, datirt vom 1. März 1809 und führt die Ueberschrift: De libello geometrico Epaphroditi et Vitruvii Rufi pag. 201—242. Von pag. 233 an hat der Herausgeber Bredow aus Schott's Werk das dort Vorhandene zum Abdrucke gebracht.

229) Zur Handschriftenkunde von Fr. Ad. Ebert. 2. Bändchen 1827, No. 20, pag. 5—12. Wir citiren nach Röm. Feldm. II, 467—471, wo S. 467 unter dem Buchstaben e die angeführte Angabe sich findet. Damit in Einklang steht Röm. Feldm. II, 478 Z. 12—13 „in dem ungedruckt gebliebenen Stück des sogenannten Aprofiditus und Betrubius Rufus" und die Bemerkung Blume's ebenda S. 29, Z. 4 v. u. „demnach ist nur noch von Nipsus, Epaphroditus und Vitruvius Rufus Einiges ungedruckt geblieben", während S. 27 Z. 21 bis S. 28 Z. 5 nur für den ganz verständlich ist, welcher schon weiss, was in den Epistolae Parisienses steht. Deutlicher hat allerdings Lange in seiner Ausgabe von des Hyginus Liber de munitionibus castrorum (Göttingen 1848) S. 18, Note 41, Hase's Abhandlung citirt, doch hatten wir dieses Buch zufälligerweise vor unserer Reise nach Wolfenbüttel noch nicht benutzt.

230) M. Juni Nipsi Lib. explicit. Incipit Aprofiditi feliciter et Betrubi Rufi architectonis. Die Wörter explicit, incipit und et Betrubi Rufi architectonis sind roth geschrieben, sowie auch die Figuren stets roth gezeichnet sind. Alles andere ist schwarz. Die oben abgedruckten

Sätze befinden sich etwa in der Mitte der zweiten Spalte von Fol. 6 (nach der Ebert'schen Pagination des Arcerianus), dann ist noch eine halbe Spalte etwa frei und erst auf der Rückseite von Fol. 6 beginnt der auch weiterhin zweispaltig geschriebene Text wie folgt:

§ 1. Trigoni hortogoni chatetus ped V, hypotenusa ped XIII. quaero basem. S. Q. hypotenusa in se fit CLXVIIII hinc tollo chatetum in se id est XXV. Reliq. CXLIIII. huius latus fit XII. erit basis. item hypotenusam invenire. chatetum in se fit XXV. base in se fit CXIIII. iunctas in unum fit CLXVIIII. huius latus fit XIII. erit hypotenusa. (Figur 22.) Item ad chatetum basem invenire. duco in se. fit XXV. hinc tollo I. reliqui XXIIII. sumo dimidiam. fit XII. erit basis. ad basem addicio asse. fit XIII. erit hypotenusa . . . . . . invenire duco basem per chatetum, id est XII ped V, fit LX. sumo dimidiam. fit XXX. erit embadum. (Figur 23.)

§ 2. Trapezum hortogonium, cuius basis est ped XL, chatetus ped XXX, vertex sive chorauste ped XXV, eius ped quadrati. S. Q. iungo basem cum chorauste. fit LXV. sumo partem dimidiam. fit XXXIIS. deduco chatetum, id est XXX, fit DCCCCLXXV. item hypotenusam invenire. basem in se et chorauste in se in unum fit $\overline{\text{I}}$ICCXXV. hinc tollo chatetum in se, id est DCCCC. reliqui ∞CCCXXV per XXXVIS. erit hypotenusa. (Figur 24.)

§ 3. Trigonus hysopleurum cuius sunt latera singula ped XXX, quem embadum. Prius quaero chatetum id est linea mediam. S. Q. duco latus in se. fit DCCCC. item unius lateris dimidiam in se. fit CCXXV. item chatetum per vasis dimidiam fit, id est XV per XXVI. fit CCCXC. erit embadum trigoni hysopleuri. (Figur 25.)

§ 4. Trigoni hortogoni linearum nomina: chatetus id est perpendicularis, basis id est sedes, hypotenusa id est obliqua. Contegit autem in omne hortogonio triangulo ut chateto in se et base in se iunctum faciat ypotenua. Sic queres. V in se fit XXV, et XII in se fit CXLIIII. iungo in unum. fit CLXVIIII. eius latus fit XIII. erit ypotenusa itaq si ypotenusa in se multiplicaveris, id est ex CLXGIII deduxeris chatetum in se, id est XXV, reliqui CXLIIII sumo latus. fit XII. erit basis. De hypotenusa in se multiplicata, id est de CLXGIII, deduxeris basem in se, id est CXLIIII. reliq XXV. huius latus fit V. erit chatetus. (Fig. 26.)

§ 5. Omnes forma normaliter quattuor lineis conprehensis longitudo per latitudinem, id est XV. XV fit CCXXV. facit eius ped constructos. (Figur 27.)

§ 6. Hortogoni chatetum per basem, id est V per XII, fit LX. sumo dimidiam. fit XXX. erint ped constrati. vel chateti dimidia per vase, id est IIS ped XII, fit XXX. erit N $\overline{\text{P.P.}}$ (Figur 28.)

§ 7. Ager est longus ped CXX, latus ped LXX, in quo arbores disposite sunt inter ped V. quero numerum arborum. S. Q. quia per ped quinos dixit sumo utrasque partem quintam. nunc longitudinis fit XXIIII, et latitudinis fit XIIII. his adicio vassis singulos angulares fit XXV et XV. ad summas in se multiplico. fit CCCLXXV. erint arbores. (Figur 29.) Quodsi fuerit ager longus ped CXX et in eo semina fuerit

disposita inter ped V numero CCCLXXV, quero latitudinem agri. S. Q. sumo longitudinis partem quintam. fit XXIIII. adicio super semper I. fit XXV. Hier schliesst das Blatt (Fol. 7 nach Ebert) und die Aufgabe bricht ab. Offenbar stehen wir vor einer Lücke, welche Ebert bereits bemerkt und auf ein Blatt geschätzt hat. Das in der Handschrift folgende Blatt beginnt sofort mit

§ 8. Mons est qui habet ad pede in circuito ped $\overline{\text{II}}$D, in mediaetateto idem in circuitu ped ∞DC, et in cacumine adaeque in circuitu ped C. sed habet in ascensu ped D. quero iugera. S. Q. iungo in unum tres circuitionis, id est $\overline{\text{II}}$D.∞DC.C hc sumpta semper parte tertiam fit ∞CCCC. totiens duco D per altitudinem. fit $\overline{\text{DCC}}$ et video quotiens habet $\overline{\text{XXVIII}}$ DCCC. fit XXIIII [illegible]. erunt iugera XXIIII hoc est tabula, quartum iugeri, et pedes ∞DC. Hier folgt als Figur ein blau gemalter Berg, aber ohne jegliche Zahlenangabe.

§ 9. Mons est strabus qui habet ad pedem in circuitu ped ∞CCCC, in cacumen circuitu ped CC. sed est altus in parte dextra ped DCCCL et ex parte leva ped DCCLXX. quero iugera. S. Q. semper iungo in unum duas circuitiones, hoc est ∞CCCC et CC. sumpta semper partem dimidia fit DCCC. facio et ascensos ambos in unum, id est DCCCL et DCCL sumpta adaequae dimidiam fit DCCC. hoc duco per DCCC fit $\overline{\text{DCXL}}$. erunt ped quadrati. iugera inveniamus. fiunt XXII. Hier folgt wieder ein blau gemalter, links sich langsam senkender, rechts steil abfallender Berg.

§ 10. Sunt autem trigoni hoc genere et his vocabulis numero G sex. id est: isoscielis. paralelogramus, scalenus, hortogonius, hisoplurus et oxigonius, quorum omnium effigies.

§ 11. Si fuerit trigonus hisoscelis cuius sit latera ped XXV, vasis autem ped XIIII, quadrati quero quod ped sint huius trigoni catectus, vel quod pedum area sit. Sic queramus. sumamus semper partem dimidiam vasis, it est de XIIII fit GI. hoc multiplico in se, fit XLGIII. et unum latus mensurae facio in se, hoc est XXV in se, fit DCXXV. deduco XLGIII, fit reliquum DLXXGI. huius semper quero latus. fit XXIIII. tot pedum est huius trigoni chatectum. Areae ped sic quaeramus. sumo vasis partem dimidiam. fit GI. hoc mensuro per chatetum XXIIII. erunt ped, huius trigoni hisoscelis area, ped CLXGIII. (Fig. 30.)

§ 12. Si fuerit trigonus paralelogramus hortogonius, cuius sit longitudo ped LXXX, latitudo autem ped LX, quero huius praelelogrami hortogoni quod pedum diagonum sit, id est linea quae ab angulo ad angulum currit. S. Q. Longitudo multiplico in se, hoc est LXXX, fit $\overline{\text{G}}$CCCC, et latitudinem multiplico in se, hoc est LX, fit $\overline{\text{III}}$DC. utrasque summas in unum fit $\overline{\text{X}}$. huius sumemus latus. fit C. tot pedum erit diagonum. (Figur 31.)

§ 13. Si fuerit trigonum scalenum, hoc est oxigonium, cuius sit latus minor ped XV, vasis ped XXV, latus maior ped XX, quero huius trigoni chatetum et embadum. S. Q. latus minorem multiplico, fit $\overline{\text{CC}}$XXV, et vasis multiplico, fit DCXXV. utriusque summas iungo in unum, fit DCCCL. hoc sepono et latus maiorem multiplico. fit CCCC. hoc deduco

de DCCCL, fit reliquum CCCCL. hinc sumo semper partem dimidiam, fit CCXXV, et de hoc sumo partem quod pedum est vasis, fit GIII. tot pedum est praecisura vasis sub latere minore. Nunc chatetum sic invenimus. mensuro latus minore in se, fit ped CCXXV. et mensuro praecisur in se. fit ped LXXXI. hoc deduco in se CCXXV, fit reliquum CXLIIII. huius querimus latus, fit XII. tot pedum est chatetus. Arae ped sic inveniemus. mensuro chatetum cum vase, hoc est XII per XXV, fit CCC. huius semper dimidiam partem, fit CL. tot pedum sunt huius trigoni embadum. (Figur 32.)

§ 14. Si fuerit trigonus hortogonius, cuius sit chatetus numero pari, id est ped GII, huius latera quero. S. Q. sumemus semper partem dimidiam, fit IİII. hoc multiplico, fit XG. hinc deduco semper I, fit reliqui XV. tot pedum trigoni vasis. cuius semper adicio II, fit XVII. erunt ped ypotenusae. Embadum autem ipsius sic inveniaemus, quemadmodum est supra demonstratum, id est sumpta vasis dimidiam. de XV fit GIS. hoc multiplico per chatetum, fit LX. tot pedum erunt trigoni embadum. (Figur 33.)

§ 15. Si fuerit trigonus hysopleurus, quod est solidum paribus lateribus clausis, et sint latera singula sed et vasis numero pari ped XXGII, quero huius trigoni hysopleuri sive solidi quod pedum area colligat. S. Q. multiplico unum latus, id est XXGII, fit DCCLXXXIIII. huic adiungo ipsam eram, fit DCCCXII. sumpta parte dimidia fit CCCCG. tot pedum est huius trigoni hysopleuri sive solidi area, alii arca (Fig. 34). Ut huius trigoni hysopleuri manifestam mensurae inveniamus rationem, et si itaque trigonum datum figure et mensure, cuius area colligit ped CCCCG, lateris unius quero ped. S. Q. facio huius trigoni semper ductam per aream octies, fit $\overline{\text{III}}$ CCXLGII. uhic semper adicio I, fit $\overline{\text{III}}$ CCXLGIII. quero huius summae quadratum, hoc est latus, fit LGI. hinc semper deduco I, fit reliqui LG. sumpta parte dimidia, fit XXGII. tot ped sunt per latera singula huius trigoni hysopleuri.

§ 16. Si fuerit trigonus oxygonius, cuius sit latus minor ped XIII, vasis autem ped XIIII, quadrati huius trigoni cathetum et arae ped quero. S. Q. multiplico latus minorem in se, fit CLXGIII, et vasis in se, fit CXCG. utramque summas in unum, fit CCCLXV. et facio ypotenusa in se fit, id est XV, fit CCXXV. hoc deduco de CCCLXV, fit reliquum CXL. huius sumo partem dimidiam, fit LXX. hinc partior XIIII, fit V. tot ped erunt trigoni minus precisura, in qua chatetum cadet. sed multiplico ipsum V in se, fit XXV. hoc deduco de CLXVIIII, fit reliquum CXLIIII. huius quero latus, fit XII. tot ped chatetus. Areae vero ped sic inveniaemus. vasis semper partior dimidia, fit VII. hoc duco XII per chatetum, fit LXXXIIII. tot ped est huius trigoni oxygonii area. (Figur 35.)

§ 17. Omnis pentagonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum multiplico, et iterum ter duco. ipsa aera. diamidiam partem sumo. pentagonum dico. (Figur 36.) Si fuerit pentagonus, cuius singula latera sint ped X, quero quod pedes area sit. S. Q. Facio decem in se, fit C. hoc semper duco ter, fit CCC. huic addicio ipsa aera, fit CCCX. dimidiam

partem sumo, fit CLV. tot ped est huius pentagoni area. Ut huius pentagoni manifestam inveniamus rationem est itaque pentagonus praedicte mensurae, cuius area colligit ped CLV, lateris unius mensura quero. S. Q. facio huius pentagoni per aream ductum XXIIII, hoc est CLV, fit III DCCXX. huic adicio semper unum, fit III DCCXXI reliqui. huius summae quero latus, fit LXI. hinc semper deduco I, fit KX. sumpta parte sexta fit X. tot pedum est huius pentagoni latus. Si interrogatus fueris, X ab asse usque in pentagono. S. Q. numerum datum in pentagono fit CXLV. hoc duco bis, fit CCXC. adicio ipsam aeram, quam interrogatus es, fit CCC. ducis per unum plus, hoc est XI, fit III CCC et dicis parte sexta fit DL. Si cum lateribus dixerit, numerum datum in troconum fit LV, adicis ipsum, fit DCV. Si sine lateribus deducis, fit CCCCXCV.

§. 18. Omnis exagonus aequis habitur lateribus, cuius latus unum in se multiplico et iterum quater duco. ipsa aera semper bis adicio. dimidiam partem sumo. exagonum dico. (Figur 37.) Si fuerit exagonus cuius lateras sint singula ped X, quero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C. hoc duco quater, fit CCCC. huic area dicta bis ducta adicio, fit CCCCXX. sumpta parte dimidia, fit CCX. tot pedum est huius exagoni area. Ut huius exagoni manifestam mensure inveniamus rationem est igitur exagonus, cuius area colligit ped CCX, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco XXXII. CCX, fit GI DCCXX. huic adicio semper IIII, fit G DCCXXIIII, et quero huius summae latus, fit LXXXII. hinc semper deduco II, fit reliqui LXXX. sumpta parte GII, fit X. tot pedum est huius exagoni latus. Ab asse usque X in exagonum. numerum datum in exagonum fit CXC. hoc ducis bis, fit CCCLXXX, ed adicio ipsum, fit CCCXC. duco per unam plus, fit IIII CCXC. dico partem semper G, fit DCCXV. Si cum lateribus dixerit, numerum datum in trogonum adicis ad DCCXXV, fit DCCLXX. Si sine lateribus dixerit, deducis de DCCXXV, fit DCLX.

§. 19. Omnis eptagonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum in se multiplico et postea quinquies duco. ipsa aera ter deduco. dimidiam partem sumo eptagonum dico. (Figur 38.) Si fuerit eptagonus, cuius latera singula habent ped X, quero quod pedum area sit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C. hoc duco V, fit D. hinc deduco area ter ducta, hoc est XXX. reliqui CCCCLXX. sumpta parte dimidia fit CCXXXV. tot pedum est huius eptagoni area. Ut huius eptagoni manifestam mensurae inveniamus rationem est itaque eptagonus, cuius area colligit ped CCXXXV, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco semper XL. CCXXXV, fit GIII CCCC. huic semper adicio GIII fit GIIICCCCGIII, et quero huius summe latus, fit XCGI. huic adicio semper III, fit C. sumpta parte X, fit X. tot pedum sunt huius eptagoni latera singula. Ab asse usque X in eptagonum. numerum datum in eptagonum fit CCXXXV. hoc duco bis, fit CCCCLXX. adicio ipsum, fit CCCCLXXX. duco per unum plus et partior per partem sextam, fit DCCCCXXXX. Si cum lateribus dixerit, numerum datum in trigonum fit LV. adicis

ad DCCCLXXX, fit DCCCCXXXV. Si sine lateribus, deduces et fit DCCCXXV.

§. 20. Omnis octogonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum in se multiplico et postea sexies ductum facio. ipsa aera quater deduco. dimidiam partem sumo. octogonum dico. (Figur 39 und 40.) Si fuerit octogonus, cuius sint latera singula ped X, quero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C, et hoc duco sexies, fit DC. ex eo deduco area quater ducta, hoc est XL. fit reliqui DLX. dimidiam partem sumo, fit CCLXXX. tot ped huius octogoni area colligit. Ut huius octogoni manifesta mensurae inveniamus rationem, est itaque octogonus, cuius area colligit ped CCLXXX, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco XLVIII per areae ped, fit $\overline{\text{XIII}}$ CCCCXL. huic adicio XVI, fit $\overline{\text{XIII}}$ CCCCLVI, et video huius summe latus, fit CXVI. huic adicio IIII, fit CXX. sumpta parte XII, fit X. erit huius octogoni latus. Ab asse usque X in octogonum. numerum datum in octogonum, fit CCLXXX. hoc duco bis, fit DLX. adicio ipsum X, fit DLXX. duco hoc per unum plus, hoc XI, fit $\overline{\text{G}}$ CCLXX. partior semper partem G, fit ∞XLV. Si cum lateribus dixerit, adicio numerum datum in trigono LV, et fit ∞C. Si sine lateribus deduces. de ∞XLV tolle LV et fit DCCCCXC.

§ 21. Omnis ennagonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum in se multiplico et iterum septies ductum facio. ipsa aera V deduco. dimidiam partem sumo. ennagonum dico. (Figur 41.) Si fuerit ennagonus, cuius latera singula habeant ped X, quero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C, et hoc duco GI, fit DCC. hinc deduco ipsa aera V, fit L. reliqui DCL. dimidiam parte sumo, fit CCCXXV. tot ped huius ennagoni area est. Ut huius ennagoni manifestam mensurae inveniamus rationem, est itaque ennagonus, cuius area colligit ped CCCXXV, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco LG per CCCXXV, fit $\overline{\text{XVIII}}$ CC. uhic adicio XXV, fit $\overline{\text{XGII}}$ CCXXV. huius summe quero latus, fit CXXXV. uhic semper adicio V, fit CXL. sumpta parte XIIII, fit X. erit ennagoni unius latus. Ab asse usque X in ennagonum. numerum datum in ennagonum fit CCCXXV. hoc duco bis, fit DCL. adicio ipsam aeram, fit DCLX. duco hoc per unum plus, fit $\overline{\text{GI}}$ CCLX. partior semper per partem sextam, fit ∞CCX. Si cum lateribus dixerit, adicio numerum datum in trigono, si sine lateribus deducis et renuntias.

§ 22. Omni decagonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum in se multiplico. ipsa aera sexies ducta deduco. dimidiam partem sumo. decagonum dico. (Figur 42.) Si fuerit decagonus, cuius latera singula habeant ped X, quero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C. hoc duco octies, fit DCCC. hinc deduco area sexies ducta, hoc est LX. fit reliqui DCCXL. sumpta parte dimidia, fit CCCLXX. tot pedum est huius decagoni area. Ut huius decagoni manifestam mensurae inveniamus rationem, est itaque decagonus, cuius area colligit ped CCCLXX, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco LXIIII per CCCLXX, fit $\overline{\text{XXIII}}$ DCLXXX. superadicio XXXVI, fit $\overline{\text{XXIII}}$ DCCXG.

huius summe quero latus, fit CLIIII. superadicio G fit CLX. sumpta parte XG, fit X. erit huius decagoni latus. Ab asse usque X in decagonum. S. Q. numerum datum in decagonum fit CCCLXX. hoc duco per unum plus, hoc est XI, fit $\overline{\text{GII}}$ CCL. partior G, fit ∞CCCLXXV. Si cum lateribus dixerit. numerum datum in trigonum fit LV. hoc adicio. Si sine lateribus hoc deduco et renuntio.

§ 23. Omnis undecagonus aequis habetur lateribus, cuius latus unum in se multiplico et postea novies duco. ipsa aera septies ducta deduco. dimidiam partem sumo. undecagonum dico. (Figur 43.) Si fuerit undecagonus, cuius latera singula sint ped X, quaero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C. hoc duco per GIII, fit DCCCC. hinc deduco area septies ducta, fit LXX. reliq DCCCXXX. sumpta parte dimidia, fit CCCCXV. tot ped area colligit. Aut huius undecagoni manifestam mensure inveniamus rationem, est igitur undecagonus, cuius area colligit pedes CCCCXV, unius lateris quero mensuram. S. Q. duco LXXII per CCCCXV, fit $\overline{\text{XXVIIII}}$ DCCCLXXX. superadicio XLGIII, fiunt $\overline{\text{XXGIII}}$ DCCCCXXGIII, et huius sume quero latus, fit CLXXIII. huic adicio semper GI, fit CLXXX. sumpta parte XGII, fit X. est undecagoni latus. Ab asse usque X in undecagonum. S. Q. numerum datum in undecagonnm fit CCCCXV. hoc duco bis, fit DCCCXXX. adicio ipsum decum, fit DCCCXL. duco per unum plus $\overline{\text{SS}}$ et partior G, fit ∞DXL. Si cum lateribus dixerit, numerum datum in trigonum adicio, fit ∞DXCV. Si sine lateribus dixerit, hoc deduco et renuntio.

§ 24. Omnis duodecagonus aequis habetur lateribus, cuius latus in se multiplico et iterum decies duco. ipsa aera octies ducta deduco. dimidiam partem sumo. duodecagonum dico. (Figur 44.) Si fuerit duodecagonus, cuius cuius latera singula habet ped X, quero quod ped area colligit. S. Q. multiplico unum latus in se, fit C. hoc duco decies, fit ∞. hinc deduco area octies, hoc est LXXX. fit reliqui DCCCCXX. Sumo parte dimidia, fit CCCCLX. tot pedum est huius duodecagoni area. Ut hus decagoni manifestam mensurae inveniamus rationem, est itaque duodecagonus, cuius area colligit pedes CCCCLX, unius lateris mensuram quaero. S. Q. duco LXXX per CCCCLX, fit $\overline{\text{XXXVI}}$ DCCC. superadicio LXIIII, fit $\overline{\text{XXXVI}}$ DCCCLXIIII, et huius summae quaero latus, fit CXCII. uhic adicio VIII, fit CC. sumpta partem XX, fit X. erit huius duodecagoni latus. Ab asse usque X in duodecagonum. S. Q. numerum datum in duodecagonum fit CCCCLX. hoc duco bis, fit DCCCCXX. adicio ipsum X, fit DCCCCXXX. duco per unum plus, hoc est XI, fit $\overline{\text{X}}$CCXXX, et partior partem VI, fit ∞DCCV. Si cum lateribus dixerit, n. datum in trigonum fit LV. adicio, fit ∞DCCLX. Si sine lateribus dixerit, deduco et renuntio.

§ 25. Sfera est, cuius diametrum ped. XIIII. quaero huius sferae inauraturam. S. Q. semper diametrum duco bis, fit XXVIII. hoc multiplico in se, fit DCCLXXXIIII. hoc duco XI, fit $\overline{\text{VIII}}$ DCXXIIII. sumptam partem XIIII. DCXG. tot ped erunt. (Figur 45.)

§ 26. Si fuerit cyclus, cuius est diametrum ped XIIII. quadrati

huius cycly aream quaero. S. Q. facio diametrum in se, fit CXCVI, et hoc duco XI. $\overline{\text{II}}$ CLVI. huius sumimus parte XIV, fit CLIIII. tot ped erunt huius cycli embadum, hoc est area.

§ 27. Si fuerit circuitio ped XLIIII, diametrum ped. XIIII, quaero huius areae ped. S. Q. sumo circuitionem per partem dimidiam, fit XXII, et diametrum per partem dimidiam, fit VII. hoc duco per XXII, fit CLIIII. tot erunt huius areae ped. (Figur 46.)

§ 28. Si fuerit emicyclus, cuius sit basis ped. XXVIII, curbatura ped. XIIII, quaero huius emicicli area. S. Q. facio huius emicycli vasis per curbuaturam, id est XXVIII per XIIII, fit CCCXCII. hoc duco XI, fit $\overline{\text{IIII}}$ CCCXII. sumpta parte XIIII, fit CCCVIII. tot ped sunt huius emicycli area. (Figur 47.)

§ 29. Absidem ad circinum. data sit curvatura altitudinis per vasem. duco undecies. sumo partem XIIII. erit embadum. (Figur 48.)

§ 30. In trigonum hortogonium circulum inscribere, qui omnes eius lineas tangat. sic. iunge chatetum et vasem, deme ypotenusam. erit diametron circuli. (Figur 49.)

§ 31. Centuriarum quadrarum deformatio, si mensurarum diversarum ritus. Centuria habet ped $\overline{\text{II}}$ CCCC ped $\overline{\text{II}}$ CCCC, passus CCCCLXXX per CCCCLXXX, actus XX per XX, cubita mile ∞DCCCC per ∞DCCCC, perticas CCXL per CCXL, agnas DC per DC, ped DLXXVII per DCCVII, in hoc pede digiti sunt XVIII non XVI, decempedas $\overline{\text{LVII}}$ DC per $\overline{\text{LVII}}$ DC. fiunt in centuria acti constrati CCCC, ped. $\overline{\text{L}}$DCCLX milia. efficit iugera CC.

§ 32. Pes habet palmus IIII, cubitus habet pedem unus, gradus habet ped IIS, passus habet ped V, ulna ped IIII, decempeda habet ped X digitorum XVI, pertica habet ped XII digitorum XVIII, actus habet ped CXX, perticas XII, stadium habet ped DCXXV, miliarius habet passus ∞ ped. $\overline{\text{V}}$, porca habet ped. $\overline{\text{VII}}$ CC, agnua habet ped $\overline{\text{XIIII}}$ CCCC, iugerus habet ped $\overline{\text{XXVIII}}$ DCCC.

§ 33. Mensurarum genera sunt tria, rectum, planum, solidum. Rectum est cuius longitudonem tantummodo metitur. planum est cuius longitudinem et latitudinem et crassitudinem metetur.

§ 34. Angulorum genera sunt trea, rectus, acutus, hebes. Rectus est qui normaliter constitutus est. acutus qui minor est recto. ebes est qui maior est recto.

§ 35. Ab asse quousque volueris cum suis et sine suis lateribus in quadratum ut sint ped suis lateribus in quadratum ut sint pedes. Si interrogatus fueris X ab asse in se, facies decem, fit IIIγ et supradices h, fit III S. hoc XI, fit XXXGIIS, et iterum hoc dece, fit CCCLXXXV. erit X ab asse in se. Aliter ab asse X in se. numerum datum in se fit C. ducis bis, adicis ipsum, fit CCX. hoc ducis per unum plus, et dicis semper partem sexta, fit CCCLXXXV.

§ 36. Decies in dynamum. facio X in se, fit C, et centies in se, fit $\overline{\text{X}}$. erit decies in dynamum.

§ 37. De in quibo. facies X in se, fit C, et hoc ducis decies, fit numero ∞. erit X in quibo.

§ 38. Item decies ab asse in quibo, fit X Z, fit II S. item X . II S, fit XXV. undecies XXV, fit CCLXXV, et iterum XI.CCLXXV, fit III XXV. erit ab asse usque X in quibo. Item ab asse usque X in quibo. numerum datum in trigonum, fit LV. ipsum in se, fit III XXV. Si cum lateribus dixerit. numerum datum in trigonum LV. si adieceris erit cum lateribus, si deduxeris erit sine *l* sine lateribus.

§ 39. Arborem sive (diese beiden Worte sind roth geschrieben) turrem, vel quodcumque fuerit excelsum ut sine umbras solis et lunae mensuris et dicas quod ped habeat altitudinis. facis sic. decumbe in dentes et da te retrorsum donec cacumen videas, et ex coloco, unde cacumen plictum cum caelum videris, surge, et mensura per terram usque ad arborem vel turrem aut quod fuerit, et quod ped inveneris, tot pedes sunt altitudinis eius. Hier folgt in der Handschrift ein hübsches Bildchen: links ein Baum von braunem Stamm mit grünem Laubwerk; in der Mitte ein oben zugespitzter blau gemalter Meilenstein; rechts ein Häuschen in den Farben blau und grün mit rothem Dach.

§ 40. In mille passu per mille quadrata iug DCCCLXGII. si interrogatus fueris decem milia per decem milia quod iug quadratus sunt, facies numerum datum in se totiens ducis eram SS. hoc est DCCCLXGII iug respond, et quoniam dixi decem milia per decem milia decies denique centies DCCCLXGII fit LXXXG deccus. tot iugera faciunt.

Exp lib Aprofoditi et Bertrubi rufi Architectonis. Inc Iuli Frontini De agrorum qualitate feliciter.

231) Hase sagt darüber in den Epistolae Parisienses pag. 212: De Rufo magis est quod ambigatur, an Vitruvius scribendus sit necne: nam reperiuntur Romana nomina admodum multa, ex quibus hoc portentum Betrubi nasci potuit: Veturnius, Vettius Urbinus, Vettius Urbicius, Viturius: non video tamen cur mutemus iam receptum nomen Vitruvius.

232) Hase l. c. pag. 213: Olere videtur nescio quid servile Epaphroditi nomen, und weiter unten: fieri potuit, ut Epaphroditus divi Trajani extiterit agrimensor, forte cum post Dacicum Parthicumque bellum maximi multique trans Tigrin ac Istrum agri sub imperium P. R. ditionemque venirent . . . . Sed haec ex coniectura et quidem levissima.

233) Ueber chorauste vergl. Zeitschr. Math. Phys. XX, historisch-literarische Abtheilung S. 68.

234) Vollständige Gleichheit herrscht zwischen folgenden Stellen: § 3 = Heron pag. 60, 21—28; § 11 = Heron pag. 62 letzte Zeile — 63, 9; § 14 = Heron pag. 57, 10—21; § 16 = Heron pag. 63, 23 flgg. und 64, 19 flgg. Gleichheit der Methode bei anders gewählten Zahlen lässt folgende Stellen in Verbindung setzen: § 1 und § 4 = Heron pag. 54, 19—30; § 2 = Heron pag. 98, 21—28; § 5 = Heron pag. 50 in mehreren Beispielen; § 6 = Heron pag. 53, 15—19; § 12 = Heron pag. 51 letzte Zeile — 52, 3 auch in Verbindung mit Heron pag. 52, 20, wo das Rechteck aus den Seiten 80, 60 vorkommt; § 13 = Heron pag. 63, 23—64, 23. Die absonderliche Figur, nicht recht zur Aufgabe passend, ist ein Seitenstück zu der Figur des Nipsus, welche nicht besser

passt (vergl. unsere Anmerkung 216); § 25 = Heron pag. 155, 3—6; § 26 = Heron pag. 115, 3—6; § 27 = Heron pag. 114, 24—28; § 28 und § 29 = Heron pag. 124, 17—19. Maassbestimmungen sind die §§ 31, 32, 40, Definitionen die §§ 10, 33, 34 gewidmet. Wir bemerken hier beiläufig, dass §§ 31—34 auch in den Röm. Feldm. I, 245—246 in dem Liber Coloniarum abgedruckt worden ist.

235) Ohne weitere Schlüsse ziehen zu wollen, möchten wir philologische Leser auf die Redensart decumbere in dentes aufmerksam machen. Sie selbst finden wir bei Forcellini (Ausgabe von 1831) gar nicht, dagegen das sehr ähnliche procumbere in dentes einmalig als bei Vitruvius (!) vorkommend. Die betreffende Stelle lautet Vitruvius VIII, 1 (edit. Rose) pag. 185 lin. 16 sqq.: Ea autem erit facilior, si erunt fontes aperti et fluentes. sin autem non profluent, quaerenda sub terra sunt capita et colligenda. quae sic erunt experienda uti *procumbatur in dentes* antequam sol exortus fuerit, in locis quibus erit quaerendum et in terra mento *conlocato* et fulto prospiciantur eae regiones. Man vergleiche auch das conlocato mit dem ex coloco in § 39.

236) Vergl. das Referat über die Theorie der Polygonalzahlen in der Arithmetik des Nikomachus bei Nesselmann, Algebra der Griechen S. 202 flgg. oder im griechischen Originale *Νικομάχου Γερασήνου Πυθαγορικοῦ ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή* Lib. II, cap. 8 sqq. (ed. Hoche, Leipzig 1864) pag. 87 flgg.

237) Mathem. Beitr. z. Kulturleben d. Völker S. 172.

238) Nikomachus Lib. II, cap. 20 am Schlusse ed. Hoche pag. 119 lin. 12—18: *ἐκτεθέντων γὰρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ' ἄπειρον συνεχῶν περισσῶν ἐπισκόπει οὕτως, ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ, οἱ δὲ δύο μετ' ἐκεῖνον συντεθέντες τὸν δεύτερον, οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς τὸν τρίτον, οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες τὸν τέταρτον, οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε τὸν πέμπτον καὶ οἱ ἑξῆς ἓξ τὸν ἕκτον καὶ τοῦτο μέχρις αἰεί.*

239) Colebrocke, Algebra of the Hindoos pag. 293—294 (Brahme-Sphutá-Sidd'hánta Cap. XII, Nro. 20).

240) Hankel S. 192 in der Note.

241) Nonius Marcellus (edit Quicherat, Paris 1872) pag. 74: *Aera* numeri nota. Lucilius lib. XXVIII: „Hoc est ratio perversa, aera summae subducta improbe“ und ebenda pag. 206: *Aera* neutri. M. Tullius in Hortensio: „Quid tu inquam? soles quum rationem a dispensatore accipis, si aera singula probasti, summam, quae ex his confecta sit, non probare?“

242) Nikomachus Lib. II, cap. 12 am Schlusse, ed. Hoche pag. 98 lin. 26 — pag. 99 lin. 2: *ἵνα ἕκαστος πολύγωνος σύστημα ᾖ τοῦ τε ὑπὲρ αὐτὸν ὁμοταγοῦς μονάδι ἐλάττονος ὁμογωνίου καὶ τοῦ ἀνωτάτου τριγώνου τοῦ ὁμοταγοῦς παρ' ἓν κειμένου.*

243) Boetii, de institutione arithmetica libri duo, de institutione musica libri quinque. accedit geometria quae fertur Boetii ed. G. Friedlein. Leipzig 1867.

244) Mathem. Beitr. z. Kulturleben d. Völker S. 176—230, auch

Zeitschr. Math. Phys. XX, histor. literar. Abtheilung S. 35 und ebenda S. 68.

245) Der Bibliothekar Regimbertus auf Reichenau hat 821 einen Katalog der damals unter seiner Obhut vorhandenen Werke hinterlassen. Darin findet sich: De opusculis Boetii. De arithmetica lib. II de geometria lib. III et de dialectica et Rhetorica Alcuini, Arati de astrologia lib. I, artis medicinae lib. I nec non et de diversis rebus libri in codice I. Vergl. P. Trudpert. Neugart: Episcopatus Constantiensis Alemannicus Pars I. Tom. I. St. Blasien 1803, pag. 542. Wohin ist dieser Codex verschwunden, der die ganze Frage mit einèm Male zur Entscheidung bringen würde? Die Karlsruher Staats- und Hofbibliothek, in welche Vieles aus Reichenau übergegangen ist, besitzt ihn nicht.

246) Dem X. S. gehört der von Friedlein mit dem Buchstaben n_1 bezeichnete Vatikancodex 3123 an. Vergl. Boetius 372, wobei wie immer die Seitenzahl der Friedlein'schen Ausgabe gemeint ist.

247) Boetius 373: Quia vero, mi Patrici, geometrum exercitissime, Euclidis de artis geometriae figuris obscure prolata te adhortante exponenda et lucidiore aditu expolienda suscepi etc. Ferner Boetius 389: Supra positarum igitur speculationibus figurarum ab Euclide succincte obscureque prolatio et a nobis verbum videlicet de verbo exprimentibus strictim translatis, quaedam iteranda repetendaque, ut animus lectoris non obscuritate deterreatur, sed a nobis potius alicuius exempli luce infusa delectetur, videntur und viele andere, aber nicht so ausdrückliche Stellen, welche in Friedlein's Namensregister zum Boetius pag. 489 zusammengestellt sind.

248) Boetius 401: Superiore vero tractatu voluminis omnia geometricae artis theoremata quamvis succincte tamen sunt dicta, sed podismorum notitiam hic liber quasi quaestionarius et omnium podismalium quaestionum scrupulositates incunctanter absolvet enodando. Veteres etenim agrimensores omnem mensurae quadraturam dimidio longiorem latioremve facere consuerunt etc. Ferner Boetius 402: Quamvis etiam in superioris libri principio, quid sit mensura, generaliter designaremus, libet tamen specialiter huius artis speculatori satis faciendo secundum Iulium Frontinum geometricae artis inspectorem providissimum, quod sit mensura, definire. Endlich Boetius 428: Si qui vero de controversiis et de qualitatibus et nominibus agrorum deque limitibus et de statibus controversiarum scire desiderat, Iulium Frontinum nec non Urbicum Aggenum lectitet.

249) Bei Boetius heisst es z. B. immer figura, wo Balbus forma hat, superficies wo Balbus summitas hat, während doch die Wörter forma und summitas bei Boetius an anderen Stellen der Geometrie vorkommen.

250) Folgende Gleichungen sind nicht uninteressant: Boetius 406, 14 = Epaphroditus 11; B. 407 = E. 13 = Nipsus 6; B. 408, 6 = E. 14 = N. 4; B. 412, 4 = N. 2; B. 412, 20 = E. 30; B. 413, 12 = N. 1; B. 414, 16 = E. 16 = N. 3; B. 415, 19 = E. 5; B. 418, 2 = E. 2; B. 418, 15 = E. 12; B. 423, 8 = E. 26; B. 423, 18 = E. 27; B. 424, 2 = E. 28; B. 424, 26 = E. 8; B. 425, 7 = E. 9.

251) Boetius 111, 8—10: Nunc vero qua ratione per hypotenusae podismum cathetos et basis summa pedalis reperiri valent, demonstrare studeamus. Bei Nipsus (Röm. Feldm. I, 297) hätte es also nach unserem Dafürhalten richtig geheissen: In trigono hortogonio cuius [hypotenusae] podismus est ped. XXV, embadum ped CL, dicere cathetum et basem separatim.

252) Boetius 416, 8 = Heron 52, 5; B. 416, 21 = H. 82, 30; und eine Stelle, welche nicht wie alle seitherigen der Geometria, sondern dem Liber Geeponicus entspricht, nämlich: B. 417, 16 = H. 212, 15.

253) Die Sechsecksformel bei Boetius 420, die Fünfecksformel ebenda 419. Die Berechnung der Seite 28 aus der Dreieckszahl 406, bei Boetius 406.

254) Boetius 423: Idem vero de endecagono ceterisque plurilateris figurarum descriptionibus si feceris, nullius erroris obstaculo lababis hoc pacto, ut naturali ordine in multiplicanda unius lateris summa et in hac quantitate, quae ex hac laterali multiplicatione nascitur, naturaliter augmentanda eademque laterali naturaliter subducanda procedas, embadumque tali ratione, ex medietatibus scilicet adinvenias.

255) Chasles, Geschichte der Geometrie (deutsche Uebersetzung) S. 520. Boetius 404. Heron S. 60 Z. 5—8.

256) Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker S. 172 und S. 193.

257) Boetius 393, 6—10; ebenda 408, 14—15; ebenda 412, 20—413, 9. Es ist nicht uninteressant, dass die bei Boetius gezeichnete Figur genau unserer, dem Epaphroditus im Arcerianus nachgebildeten Figur 49 entspricht mit dem einzigen Unterschiede, dass dem Durchmesser die Zahl V statt VI angeschrieben ist, scheinbar richtiger, da VIII + XII — XV = V; thatsächlich noch unrichtiger, da jetzt sowohl die Höhe mit VIII, als der Durchmesser mit V falsch sind.

258) Das Fragment mit der Ueberschrift De iugeribus metiundis Röm. Feldm. I, 354—356. Die älteste, dieses Fragment enthaltende Handschrift ist der der wolfenbüttler Bibliothek angehörige codex Gudianus, nach Ebert (Röm. Feldm. II, 472 am Ende) aus dem X. S., nach Blume (ebenda S. 42 am Ende) aus dem IX. oder X. S. Ausserdem findet sich das Fragment auch im Rostocker Codex.

259) Script. Metrol. II. Proleg. S. 34 Note 1, wo neben dem in unserem Texte ausgeführten Gedanken auch die offenbar glückliche Conjektur erscheint, statt Kastrensis iugerus quadrat*us* habet perticas CCLXXXVIII, pedes autem quadratos $\overline{\text{XXVIII}}$DCCC müsse es heissen: Kastr. iuger. quadrat*as* habet pert. etc.

260) Vergl. z. B. Varro: Iugerum dictum iunctis duobus actibus quadratis. — Columella: Actus quadratus undique finitur pedibus CXX. hoc duplicatum fecit iugerum, et ab eo quod erat iunctum nomen iugeri usurpavit. — Frontinus: Hi duo fundi iuncti iugerum definiunt. — Isidorus: Actus duplicatus iugerum facit. ab eo quod est iunctum iugeri nomen accepit iugerum autem constat longitudine pedum CCXL, latitudine CXX. Diese Stellen finden sich sämmtlich in den Script. Metrol.

Romani leicht nachzuschlagen vermittelst des vortrefflichen Index Latinus pag. 243 s. v. iugerum.

261) Hierher gehört vielleicht die Stelle des Proklus (ed. Friedlein pag. 403 lin. 10—14), auf welche Hankel S. 297 Note 3 in anderem Zusammenhange aufmerksam macht, und wonach das Feld dem Umfange nach abgeschätzt worden sei. Freilich ist diese Proklusstelle sehr verderbt, so dass der genaue Sinn sich schwer ermitteln lässt.

262) Heron pag. 124 lin. 17—19 und 115 lin. 3—6. Die im Texte weiter beigezogenen Stellen Heron's sind für das Sechseck pag. 134 lin. 15—17, für das gleichseitige Dreieck pag. 207 lin. 1 flgg., für das unregelmässige Viereck pag. 212 lin. 15—20.

263) Hoc in arcu esse dicimus (Röm. Feldm. I, 356 lin. 10) kann zwar noch eher die Bedeutung haben, die Länge des Bogens sei so und so gross; wir wollen aber zur Rettung des Verfassers, so weit sie überhaupt möglich ist, annehmen, er habe sich hier nur undeutlich, nicht widersinnig ausgedrückt.

264) Vergl. Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker S. 286—288.

265) Z. B. Dümmler's Artikel Alkuin in der Allgemeinen deutschen Biographie Bd. I, S. 343—348, welchem die im Texte zwischen Anführungszeichen abgedruckte Stelle wörtlich entnommen ist.

266) Misi aliquas figuras Arithmeticae subtilitatis laetitiae causa.

267) Frobenius in der im Texte genannten Alcuinausgabe Bd. II, S. 440: Extat vero sub nomine Alcuini in pervetusto Codice MS. Monasterii Augiae Divitis, unde descriptum ad nos venit.

268) Eine nähere Bestimmung des Karlsruher Codex wäre vielleicht dadurch möglich, dass auf S. 143 desselben in der Umschrift um ein Bild von einem Wittegowo Abbas die Rede ist. Wer aber diese Persönlichkeit sei, ist uns zu ermitteln nicht gelungen. C. J. Böttcher in seiner Germania sacra kennt den Namen nicht, und auch in Zeidler's Lexikon kommt er nicht vor.

269) Enigmata *Rkskbklkb* [d. h. risibilia]. Video et tollo. si vidissem non tulissem. *nxz fbtxb* [d. h. nux fatua]. — Portat animam et non habet animam. non ambulat super terram *naxks* [d. h. navis] neque in caelo quid est, quod fuit et modo non est. ambulat circa ignem et operatur. obicem unum *pfdfm* [d. h. pedem]. *hbbfo* [d. h. habeo]. volavit volucer sine plumis. sedit in arbore sine foliis. venit homo absque manibus. conscendit illum sine pedibus. assavit eum sine igne. comedit eum sine ore. *nxz* [d. h. nux] a Titane. — Equitavit homo cum femina. mater eius matris meae socrus fuit. *xktrkcxs* [d. h. vitricus]. — Porto filium filii mei. mariti mei fratrem. alterum unicum filium meum. — Quatuor verres. singuli VII scrofas habentes, quae singulae VII porcellos genuere. quot sunt simul? CCCCI cum verribus. — Novem panes divide inter XII mancipia. VIII viris I panem, et femina semissem, dimidium autem infantibus. — VIII vicibus VIII LXIIII. Das 1. Räthsel und ebenso das 3. ist leicht verständlich: Die leere Nuss hob der Finder auf, als er sie sah; hätte er sie als leer erkannt, hätte er sie nicht getragen. Der Mann aber, der mit seiner Frau reitet, und

dessen Mutter die Schwiegermutter meiner Mutter ist, ist mein Stiefvater. Schwieriger ist die Uebersetzung des 2. Räthsels. Offenbar handelt es sich um das Sternbild des Schiffes Argo und um die Bewegung desselben um die Sonne; auch dürfte in Betracht zu ziehen sein, dass navis durch Wegfall des *n* in avis der Vogel sich verwandelt, und dass der Mast ein Baum ohne Blätter ist; ganz deutlich wird aber uns wenigstens die Sache immer nicht, insbesondere nicht, was die von der Sonne verzehrte Nuss bedeuten soll. Oder ist *nxz* ein Schreibfehler für *npz*, d. h. nox? Das 4. Räthsel sieht einer beabsichtigten Lösung von ziemlich unfläthigem Gedanken ähnlich, wie z. B. ein Weibchen, welches von ihrem einzigen männlichen Jungen wiederholt, und zwar wieder mit einem männlichen Jungen trächtig ist. Die 5. Frage ist der XLI., die 6. der XXXII. XXXIII. und XXXIV. der Druckausgabe nahe verwandt, aber wegen der Schreib- oder Rechenfehler nicht wiederherzustellen. Endlich den Schluss bildet der nicht räthselhafte Ausspruch 8 mal 8 ist 64.

270) In Herzog's Realencyklopädie für protestantische Theologie und Kirche Bd. VII (1857) pag. 205 giebt Ed. Reuss in dem Artikel Kabbala unter anderen Spielereien auch an: 3) Temura, das Anagramm, und zwar das einfache, wenn man die Buchstaben eines Wortes versetzt; so lernt man, dass der Engel II Mos. 23, 23 מַלְאָכִי der Engel מִיכָאֵל war; oder das Künstliche, wenn nach bestimmten Regeln jedem Buchstaben des Alphabets die Bedeutung eines anderen gegeben wird, z. B. dem Aleph die des Tau, dem Beth die des Schin u. s. w. von vorn nach hinten und rückwärts (Alphabet אַתְבַ"שׁ) s. die Ausleger zu Jeremias 25, 26, oder dem ersten Buchstaben die des zwölften, dem zweiten die des dreizehnten u. s. f. (Alphabet אַלְבַ"ם) und umgekehrt. In derselben Encyklopädie Bd. XIV (1861) pag. 17 setzt Leyrer in dem Artikel Schriftzeichen und Schreibkunst noch Folgendes hinzu: Aus der das Geheimalphabet Athbasch darstellenden Bustrophedondarstellung der 22 hebräischen Buchstaben:

למנסעפצקרשת
כיטחזוהדגבא

(nach derselben wird z. B. statt בבל Jerem. 25, 26 ששך geschrieben) emendirt und erklärt Hitzig auf scharfsinnige Weise die berühmte Stelle bei Iren. c. haer. II, 24 und zugleich die Entstehung des römischen *elementa* aus *l*, *m*, *n*, die nach der Athbaschstellung für einen Römer als die ersten Buchstaben erscheinen mussten.

271) In Aufgabe III heisst es im Drucke: XXVIII et XVIII et tertio sic; fiunt LXXXIIII. Es soll heissen: XXVIII et XXVIII et tertio sic, fiunt LXXXIIII. In Aufgabe VII heisst es im Drucke: Auricalchum ter XLV id est CXXV. Es soll heissen: Auricalchum ter XLV id est CXXXV. In Aufgabe LII heisst es im Drucke: In prima subvectione portavit camelus modios XXX super leucas X. Statt der letzteren Angabe soll es heissen: super leucas XX.

272) Heron pag. 220.

273) De institutione uxoris et posthumi vel posthumae (Iulianus lib. XXIX Digestorum). Si ita scriptum sit „si filius mihi natus fuerit, ex besse heres esto [ex reliqua parte uxor mea heres esto]; si vero filia mihi nata fuerit ex triente heres esto, ex reliqua parte uxor heres esto“ et filius et filia mihi nati essent: dicendum est, assem distribuendum esse in septem partes, ut ex his filius quatuor, uxor duas, filia unam partem habeat: ita enim secundum voluntatem testantis, filius altero tanto amplius habebit quam uxor, item uxor altero tanto amplius quam filia: licet enim subtili iuris regulae conveniebat, ruptum fieri testamentum, attamen, quum ex utroque nato testator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad huiusmodi sententiam humanitate suggerente decursum est: quod etiam Juventio Celso apertissime placuit (Lex 13 principio Digestorum lib. 28 tit. 2). Die Stelle des Cäcilius Africanus vergl. Lex 47, § 1. Digest. lib. 28 tit. 5; die Stelle des Julius Paulus Lex. 81 principio Digest. lib. 28 tit. 5.

274) Mommsen (Röm. Feldm. II, 148: Man kann in dem Celsus entweder den Ti. Julius Candidus Marius Celsus, Consul 86 und 105, oder auch einen der Juristen dieses Namens, den Vater oder den Sohn, P. Juventius Celsus, Prätor 101, Consul zum zweiten Mal 129 vermuthen, in dem Balbus einen der Consuln Q. Julius Balbus von 85 oder 129, wo er College des Celsus war; doch lässt sich keine dieser Hypothesen mit wesentlicheren Gründen unterstützen, als das Zusammentreffen gewöhnlicher Namen ist.

275) Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker S. 303—329. Ueber das Datum der Geometrie S. 319.

276) Oeuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II collationnées sur les manuscrits, précédées de sa biographie, suivies de notes critiques et historiques par A. Olleris. Clermont — F[d] et Paris 1867.

277) Vergl. Olleris pag. XXXVII und 594.

278) Die Besprechung erschien bereits 1867, S. 69—79 der Literaturzeitung zum XII. Bande der Zeitschr. Math. Phys.

279) Vergl. Olleris pag. 592—593 und Vincent 416.

280) Vergl. Olleris pag. 423 lin. 22 bis pag. 424 lin. 4 von unten.

281) P. Bernhard Pez schreibt 1721 in der Dissertatio Isagogica in Tom. III Thesauri Anecd. Noviss. pag. VII: Alium nos eumque sexcentorum circiter annorum manu exaratum codicem, Gerberti Geometriam complexum, in Bibliotheca Petrensi Salisburgi reperimus, unde domum reversis Reverendissimus et Perillustris Dominus celeberrimi Petrensis Monasterii Abbas, Placidus, eundem benignissime communicavit. In eo Codice textum Gerberti, nulla capitum divisione insignem passim anonymi notulae in margine comitabuntur, ex quibus eas duntaxat ad editionem nostram adhibuimus, quae vetustis Geometricarum mensurarum notis, nostrae aetati penitus ignotis et singulari cura, ut in Codice descriptae erant, hic in ligno incisis, aliquam lucem conciliarent. Caeterum textus non uno loco corruptus est nec schemata Geometrica ubique satis exacta. Verum a codicis nostri fide recedere nefas nobis esse duximus.

Restituant male affecta loca, quibus Colbertinum aliosque manuscriptos codices Fortuna obtulerit. Gerberti Epistola ad Adelboldum: Haec epistola .... in eodem codice, ex quo eiusdem Geometriam exprompsimus, eadem manu exarata extabat. Die Geometrie Gerbert's bildet den Anfang der II. Abtheilung des III. Bandes des Thesaurus bis S. 82.

282) Olleris pag. 592.

283) Ratione circuli probatur quociens rota plaustri in leuga rotetur. Sic autem inquiritur. inprimis per diametrum rotae quot pedes habet ipsa rota in circuitu. ut rota, quae habet in diametro pedes VII, habet in circuitu pedes XXII. postea quaeritur quot miliaria habet leuga una, et miliarium quot passus, passus quot pedes. Quibus pedibus inventis dividuntur pedes leugae in pedibus rotae. Ut est: leuga habet miliaria II, miliarium passus mille, quos nos dextros[1]) dicimus, Burgundiones, Itali, Bawarici, Arabici passus pedes V, tota leuga pedes $\bar{X}$. Quos pedes per pedes rotae divido, id est per XXII, scilicet quociens XXII sunt in $\bar{X}$ quadringenties quinquagies quater XXII sunt $\overline{IX}$ DCCCCLXXXVIII et remanent XII de X milibus, id est unus pes plus quam medietas rotae, et tunc dico quod quociens pedes rotae sunt in passibus leugae, tociens rota in leuga rotatur.

Scimus triangulum tres interiores angulos duobus rectis angulis equales habere[2]). Angulorum III sunt genera. Rectus sic. (Figur 51.) Acutus sic (Figur 52.) hebes sic. (Figur 53.) Itaque hebes est[3]). (Figur 54.) Acutus interior. Rectus medius, sic. Ergo si vis videre quomodo triangulus III interiores angulos equales habet duobus rectis hic habeas theorema. Sit propositus triangulus ysopleurus, qui semper est oxigonius, cuius angulos III litterae notant *a b c* et basim quidam *a b*. Sinistram hypotenusam *ac*, dextram vero *c* et *b* determinant. ducatur coraustus directim per punctum superioris anguli basi equaliter opposita. dehinc descendent perperdiculares a summitatibus corausti ad extremitates basis et fient altrinsecus ex conjunctione corausti et perpendicularium duo recti anguli[4]) tribus coequales hoc modo. (Figur 55.)

---

[1]) Dum vadis, primum move sinistrum pedem, et ubi pones dextrum, ibi erit passus ab illo loco ubi prius stabat. (Alte Glosse von derselben oder nur sehr wenig jüngeren Hand wie der Text. Demselben Glossator gehören auch die übrigen hier aufgenommenen Anmerkungen an, während wir spätere, etwa dem XIV. S. angehörende Glossen, die gleichfalls vorkommen, aber noch Unwichtigeres als die alten Glossen enthalten, einfach fortliessen).

[2]) Principium alicuius geometriae.

[3]) exterior.

[4]) Duo recti an superius tribus acutis in triangulis equipollent. tantum enim illi duo valent, quantum si de .*c*. inferius ducatur linea quae facit altrinsecus duos .*r*. Illi duo recti continent duos acutos inferiores et insuper ipsum acutum superiorem, qui divisus per lineam equipollet etiam extremis in basi, sive qui sunt extra triangulum inferius.

Interior angulus dicitur qui perpendicularem inter tres lineas habet in triangulo [5]).

Est autem quaedam altitudinis mecienda regula, qua cum umbra ipsius altitudinis ipsa altitudo mensuratur. quam sic notam putamus, ut ex ipsa positione carere estimemus.

Cubitum geometricum dicit origenes tantum valere quantum nostra sexcubita valent, quo cubito geometrae solvunt quaestionem arcae noe, quantae fuerit capacitatis ut omnia contineret [6]).

Secundum egesippum vel eugippum [7]) humani corporis longitudo a vertice usque ad vestigia sexies tantum habet quam latitudo, quae est ab uno latere usque ad alterum latus, et decies quartum altitudo, cuius altitudinis mensura est a dorso ad ventrem, velut si iacentem hominem metiaris supinum seu pronum. sexies [8]) tantum latitudinis est a capite ad pedes quam latus a dextera in sinistram, vel a sinistra in dexteram.

Construe quadratum de ligno aut eramine in modum *a.b.c.d.* (Fig. 56.) undique equaliter quadratum cuiuslibet quantitatis, sed quanto maior [9]) tanto melior. et pone lignum cuiuslibet longitudinis [10]) in angulo *.b.* et alius tale in *.c.* et tercium in *.d.*, sic infixa in ipsum quadratum, ut equaliter cuncta stent. et ipse quadratus inter *a. b.* fiat cavatus regulariter [11]), in qua cavedine pone fustem similem prioribus ita ut possis eum movere quolibet et fiat ipse fustis *.e.* Quo facto contemplare recto intuitu per *c.b.* usque ad terminum latitudinis, si sit in campo aut in quocunque loco, cuius mensuram scire desideras, qui terminus est *.f.* Postea sic equaliter stet ipse quadratus in terra sine aliqua elevatione. Dehinc divide *a.b.* in quotlibet divisiones, aut in XXX aut XL aut plus. et eadem divisione *a.d.* partire. Postea tantum move *e.* huc illuc, quousque recta acie tantum videas *.f.* per *d.e.* [12]) et non mutatur loco priori *b.c.* Tunc considera ubi steterit *.e.* inter *.a.b.* et vide quanta sit pars *e.a.* ad *a.d.* [13]) tanta pars erit *d.c.* [14]) ad *c.b.f.* et quociens est *e.a.* in *a.d.* tociens est *d.c.* in *c.b.f.*

De alio horologio [15]). Ianus et Apollo [16]) dii sibi pariter invicem representati fuerint, discriminant certas horas. Namque iam facies

---

5) Quia hebes perpendtculum mittit extra.

6) Cubitus a fine brachii usque ad finem pollicis.

7) Nichil ad rem.

8) Corrupta litera, sed a superioribus bene videtur.

9) Quantitas.

10) Superduit semipedalia.

11) Per proportiones.

12) *f.* per *d.e.* foramina ista ita sint obliquia, ut *f.* possit videri.

13) id est quomodo se habet *e.a.* ad *a.d.*

14) ille catetus.

15) per aquam.

16) Faciunt et alii cal. et ari. quorum quilibet alium suo hora percutit.

bifrontica ab apolline[17]) verberata reverberat[18]) apollinem. sicque alterna reverberatione vel habitus mutatione horasque eiusque partes incunctanter assignat.

Primum observandum est in epera, ut ex omni parte eque sit rotunda, deinde puncto pro libito[19]) uno pede circini infixo[20]), quod nos tamen solemus inprimere in illo loco, quo et artificiosus tornator, quasi idem punctum perfigurans vel demonstrans, solet circumvolvere, dum primo incipit eam formare, alter circini pes in tantum relaxet usque dum mensori medietatem grossitudinis sperae se comprehendisse videatur, et circulus circumducatur. Tunc eadem latitudine circini punctum aliud priori tamen oppositum tamdiu huic et illuc est imponendum, donec alter circini pes aut iam facti circuli observet vestigium, aut equaliter excedat, aut equaliter intus remaneat. Si ergo indesinenter sectatur tramite eiusdem circuli, equinoctialem circulum qua ratio fiet, facillime invenisti[21]). Si vero aut eque excedendo aut eque infra remanendo ab eo deviat, medietas duorum circulorum equinoctialem obtineat. Quo huius modi arte invento per duos coluros qui ab imperfectione sua nomen accepere[22]) est dividendus[23]). Sic igitur in IIII quadrantes corpus totius est sperae partitum. Et si LX sexagesimas tocius sperae cupias facillime reperire singulos quadrantum in tria divide[24]), quippe in quolibet polo incipiens et per coluros usque ad equinoctialem circulum ascendens, et ab eodem equinoctiali circulo per coluros[25]) intraparciendo quadrantes ad alterum polum descendens[26]) singulas harum terciarum in V partire, et invenisti LX sexagesimas[27]) sperae. Sed priusquam circinum mittes ad inveniendas sexagesimas, quadrantes equinoctiales[28]) circuli sexagesimarum in tria dividas, sic ut et partes parallelarum divisisti. Si autem et singulos gradus solis desideres scire harum quintarum singulas in sex divide. Igitur his ita inventis[29]) excipe quintas de gradibus solis in excellentioribus lineis[30]). Insuper

---

[17]) Imago aliqua sit.

[18]) Trudunt se.

[19]) id est ubi vis.

[20]) per unum pedem.

[21]) Si vero attingit circulum in loco uno, in alio non, centrum non est oppositum priori. tunc muta circulum donec invenias

[22]) id est ducantur coluri qui secent eum.

[23]) in quatuor partes.

[24]) a polo ad polum.

[25]) id est per lineam coluri.

[26]) Quadrantes hic vocat de polo ad polum.

[27]) Unaquaque habet sex gradus solis.

[28]) Equinoctialem divide eodem circino quo et priorem in quadrantes.

[29]) Parallelos constituunt.

[30]) *Excipe quin.* constitutas *de gradibus solis* quia unaquaque habet sex gradus *in ex lin.* id est coluris, quia tam bene gradus solis com-

et hoc in memoria teneatur, quod eedem sexagesimae quintae et sexquipartita intervalla vocantur de sex gradibus, quo se complectuntur. Tunc a quolibet et per sexagesimas parciens in sexta[31]) circulum arcticum circumducas, et ad inveniendum antarcticum similiter facias. Deinde ad quemlibet topicum inveniendum per V[32]) sexagesimas ab arctico et ab antarctico partire, et zonas tropicorum circumducito. Circuli vel zonae dicuntur parallelae, id est eque distantes circuli[33]), quia per quot quintas arcticus, per totidem est et antarcticus inventus, per quot topicus hiemalis, per totidem topicus estivus. Post hoc, quemlibet duorum colurorum velis, habe pro solsticiali, in quo solsticia sunt, alium pro equinoctiali, id est in quo duo equinoctia sunt. Ecce primus[34]) et principalium principalis altissimus et mediterraneus, id est in meditullio terrae positus[35]). Ille famosus et omnibus pene phylosophis ammirabilis mundi status[36]). In omnibus hic solus equalis semper inaccessibilis ac ideo omni humano cultura inhabitabilis, quod in media perusta zona positus sit. Solus hic neque ad dexteram, neque ad sinistram, vere nusquam inclinatur, et ex eo, qui per omnia equaliter est statutus, omni tempore anni equales dies noctesque, scilicet perpetum equinoctium habere manifestatur. In hoc polus uterque libratur equaliter, quod in aliis minime invenitur. hic non per numerum, ut arithmetica testatur, sed in ipsa rerum machina mirum in modum deprehenditur, quomodo omnis inequalitas ab equalitate procedat et recedat[37]).

Figur 57. Si diei horas scire desideras per astrolabii partem quartam, sic possint scire videas intellectuque quodammodo acuto discernas. hic enim est inveniendi modus. Sume eam divisam in XC partes, per quas sapientes habitabilis terrae diviserunt latitudinem, ac inprimis, quae sit illius terrae latitudo, in qua horae inveniendae sunt,

---

putantur a septentrione in austrum sicut ab oriente in occidentem. Coluri autem ideo excellentiores dicuntur, quia ad capita natura contingunt.

[31]) sexagesima.

[32]) post sex priores.

[33]) Sensum nota, quia littera falsa est. Paralleli igitur circuli spacium infra sunt zon.

[34]) Hic forsan aliquid deest. commendat enim equinoctiale, de quo nichil dixerat.

[35]) id est equinoctialis.

[36]) Famosus status mundus qui est sub equinoctiali. Qui ibi essent semper haberent equinoctium.

[37]) Equinoctialis quasi libra altior est, et duo poli quasi due lances ab eo dependent. Boetius per numeros ostendit quomodo inequalitas ab equalitate procedat et redeat ad cam [der Glossator meint offenbar die Stelle pag. 66 flgg. der Friedlein'schen Boetius-Ausgabe]. Hic autem in re potest videri quia statim ab equinoctiali dies crescunt vel decrescunt usque ad cancrum et capricornum, et tunc tantum redit ad equinoctiale, et ibi fit iterum equalitas.

inquire, eique medium circuli medietatem cumpone. hoc facto postquam diei mensis quotus sit invento, qui insignitus est in medio curriculae eiusdem diei invento, perpendiculum suppone, et in qua superiorum linea ipsum perpendiculum currit, superveniens videatur, ac eiusdem lineae superiori extremitati illud parvum medicurriculum, quod super pendiculum currit, superducatur. deinde, hoc sic instituto, eandem astrolabii quartam solis radiis oppone, ut per eius utraque foramina intus eant. His vero per utraque intus euntibus, perspice super quam lineam perpendiculum pendeat, ac super eandem ipsam parvulum medicurriculum in perpendiculo positum constitue. ubi primitus eiusdem medicurriculo ita posito tunc horarum inferius positarum ordine cognito, super quem perpendiculum superiaceat, videatur, atque eam horam certam esse videas, super quam perpendiculum superiacere videatur.

Divisum autem ab huiusmodi divisionis sapientibus tociens habitabilis terrae spacium in VII climata dignoscitur. Ipsa vero elymata in XC partes esse divisa dicuntur. Qui autem in quocunque loco fuerint cuiusque climatis partem de XC per rationem invenire volueris sumpto astrolabio eo die., quo sol primum gradum arietis intraverit, mediclinioque solis radius donec per eius foramina intraverit, ut solitum in inveniendis tamdiu convenienter opposito gradu, numerus qui sit annotet, ac deinde eadem quae de XC sublato, quid reliquum sit, perspiciat. Deinceps totam medio loco, ubi hoc factum fuerit, climatis partem dicat, quotum reliquum fuisse liquet.

Speram celi facturus ducas circulum per medium globum, quem in LX puncta distribues, et quodcumque ex ipsis volueris pro polo acceptum.*a*.littera signes, et in opposita id est in XXXI⁰ ab.*a*.pone.*f*.[38]) ecce alter polus.tunc sextum punctum ab.*a*.signabis per.*b*.undecimum punctum ab.*a*.signabis per.*c*.ecce tropicus. Similiter retro ab.*f*.usque *c*.in XI⁰ pones.*d*.et in V⁰ ab.*f*.versus.*d*.pones.*e*.Tunc posito circino in.*a*.circumduces.*b*.et.*c*. Ita cum.*f*.circumduces.*e*.et.*d*., quod fient quinque zonae, in.*a*.polo boriali considerato, in.*f*.polo austriali. Ad inveniendum ergo zodiacum pone circinum in IIII puncto ab.*a*.[39])et circumduces punctum XVII~mum ab.*a*. Simili modo posito circino in IIII puncto post.*f*.XVII mum ab eo, id est.*f*.[40]), qui est XIII ante *a*., circumduces, cuius latitudinem et longitudinem in XII partes di-

---

[38]) Intervalla in longum facta pauciora sunt quam termini eorum, in rotundo autem tot intervalla quot et termini. hoc ideo, quia termini extremi in rotundo conveniunt.

[39]) *in quarto puncta ab.a.*versus locum ubi debet esse capricornus in XVII⁰ puncto ab.*a*.duc circinum. Postea in quarto puncto ab.*f*. versus cancrum similiter in XVII⁰ puncto ab.*f*.fige circinum, quod fit recte per oppositum. Sic latitudinem zodiaci includis duabus sexagenis, et in ariete et libra ex utraque parte equinoctialis lineae per unam sexagenam protenditur.

[40]) Septimum decimum ab.*f*.tercius decimus ante.*a*.septem et decem et XIII sunt XXX.

vides, quae XII longitudinis partes per quae XII signabis figuras, et nomina XII habebunt signorum. adhuc duces circulos per polum utrumque crucem faciens in utroque polo, unusque illorum per cancrum et capricornum transiens solsticialis, alter per arietem et libram equinoctialis erit. Cetera necessaria sperae docet Ygimius.

284) fol. 39 verso wahrscheinlich zum Worte matheseos heisst die Glosse: Cum aspiratione doctrina, sine aspiratione vanitas et supersticiosa disciplina disputantium de ortu et morte et vita hominum. Ueber die mathematici damnabiles, von welchen, wie wir vermuthen, hier die Rede ist, vergl. Anmerkung 341 unserer Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völk., wo wir erstmalig für mathematisch-historische Kreise auf jene Gesetzesstellen aufmerksam gemacht haben, dann auch Hankel S. 301.

285) fol. 41 recto: Sed pars corporis est unum eorum quod corpus vocatur. Macrobius haec omnia vocat corpus.

286) fol. 45 verso zu Kapitel II: probaturus quod asses componatur C bisses non potes per abacum scire. quia tres duos faciunt, et ideo fac inter trientes et divide tunc per ternarium, d. h. wie viel mal $\frac{2}{3}$ in 100 enthalten sind, kann man auf dem Abacus nicht rechnen, weil deren 3 erst 2 machen; man muss also zunächst 100 in Drittel verwandeln und dann durch das Dreifache dividiren, also, was er freilich nicht sagt, 300 durch 2. fol. 83 verso zu Kapitel LVIII: In abaco ponantur tres et semissis superius, idem inferius. fol. 102 verso zu § 2 des Briefes des Adelboldus an Papst Sylvester: In abaco XXI fac divisiones et vide quid eveniat in denominatione. Ut si dicam, divido XII per tercias suas et tollo tunc unam terciam id est quaternarium.

287) fol. 51 verso: Divide hebetem in duas partes. maior eius pars maior est maiori anguli in ampligonio, et minor maior minori. Fig. 58. Mit Hülfe der von uns beigesetzten Buchstaben beweist sich der Satz einfach wie folgt:

$$\delta + \alpha = \beta + \gamma = 90^0, \ \alpha + \beta > 90^0 \text{ also } \alpha > \gamma \text{ und } \beta > \delta.$$

288) fol. 79 verso: Non est verum nisi in pitagoricis. quod autem dicat quemlibet forsan idem est, quasi diceret quicumque in eadem proportione sit, quia pitagoricus per unum eundem multiplicatus manet in eadem proportione in qua et priores.

289) fol. 80 recto: Quadratus proprie qui habet latus equale et rec. Parte altera longior qui tantum unitate vincit latus unum, ideo quia unitas est altera pars binarii qui est minimum alteritatis. Antelongior est quantocumque excedit unum latus tantum plus quam una unitate.

290) fol. 105 recto: Vera est haec regula: in omni trigono equilatero septimum aufer, reliquum habe pro cateto, ut in hoc, ubi est in omni latere XXX. triginta divide in septem. De viginti octo septima pars est IIII or. duo, qui supersunt, divide, unum in septem partes et iterum unitatem in septem et habes II septimas. Aufer IIII or et duas septimas unius, remanent XXIIII et duodecim septime. de VII fac unum integrum, et erit catetus XXV et V septimae. Duc per catetum latus unum, huius medietas erit area trigoni. Sed ne te minutiae im-

pediant, nota, cum dicis, quid sunt quinque septimae in XXX, divide XXX in VII partes, et duabus septimis ablatis vide quid constituent quinque septimae de XXX. Sed et illa geometricalis Regula de cateto falsa est, qui non fuit forsan veteribus bene exquisita, vel non curaverunt minutias, et ideo XXVI integros computaverunt. Item et ista arithmeticalis falsa, quae computat integros pedes, qui non sunt integri. Arithmetica enim non recipit minutias.

291) Pez, pag. 87—92, Olleris, pag. 471—475. Der Brief im Salzburger Codex beginnt erst mit den Worten: Macrobius super somnium Scipionis und schliesst wie bei Olleris mit puteorum profunditatibus, wogegen Pez noch 4 weitere Zeilen hat.

292) Olleris, pag. 446, Anmerkung.

293) Vergl. Trithemius, Catalogus Scriptorum Ecclesiaticorum, Coloniae MDXXXI. Fol. LXXVII recto: Rupertus episcopus Linconiensis, vir in divinis scripturis eruditissimus et in secularium litterarum disciplinis omnium suo tempore doctorum peritissimus, philosophus, astronomus et calculator insignis et theologorum sui temporis facile princeps, ingenio subtilis et clarus eloquio, nomen suum multa et varia scribendo cum gloria transmisit ad posteros. De cuius opusculis ad manus nostras pauca pervenerunt. Feruntur autem ista: Summa theologiae lib. I. Summa quae numerale dicitur. De sphaera coelesti [Intentio nostra in hoc tractatu . . .]. De computo ecclesiastico. Calendarium pulchrum. Alia insuper multa aedidit', quae ad notitiam meam non venerunt.

294) Zeitschr. Math. Phys. X, 1—16.

295) Wilhelm Arndt, Schrifttafeln. Berlin 1874.

296) Die letzten Bemerkungen gehören wörtlich einem Briefe des Pater Amandus Jung an den Verfasser dieses Buches vom 9. März 1875 an. Ueber das Alter der Handschrift bedauern wir mit diesem Gelehrten nicht gleicher Ansicht sein zu können. Er schreibt uns: „Der Codex gehört, wenn nicht der zweiten Hälfte des XII., wenigstens der ersten Hälfte des XIII. S. an.“ Wir haben im Text begründet, warum wir den Codex für um 50 bis 100 Jahre älter halten.

297) Röm. Feldm. I, 92, 11—93, 3.

298) Wir citiren nach der Eintheilung von Pez. Olleris hat das Pez'sche Kap. XXIX als XXI eingeschaltet, und nennt daher die hier citirten Kapitel XXII, XXIII und XXV. Bei Kapitel XXX treffen die beiden Numerirungen wieder zusammen. Dass wir Pez, d. h. dem Salzburger Codex folgen, findet seine Begründung in der Zuverlässigkeit, welche diese Handschrift nach unserer Meinung auszeichnet.

299) Olleris S. 445: Si cuius libet rei altitudinem investigare volueris huius modi *militari ingeniolo* investigare poteris. Bei Pez S. 56 heisst es allerdings etwas weniger ausdrücklich *iaculari ingenio.*

300) Sed nequaquam silentio puto transeundum quod interim dum haec scriptitarem ipsa mihi natura obtulit speculandum (Olleris 425 oder Pez 34).

301) Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker, S. 324.

302) Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker, S. 320.

303) Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie (deutsche Uebersetzung) S. 585: Man erkennt besonders in Gerbert's Geometrie eher eine Nachahmung und einen Commentar der Werke von Boetius, als einen Widerschein des Wissens und der Methoden der Araber, wovon wir die ersten Spuren in Frankreich erst im XII. S. finden.

304) Gerbert Kap. XLI = Nipsus, Aufgabe 1. Kap. XLII = Nipsus, Aufgabe 2. Kap. XLIII = Nipsus, Aufgabe 2, zweites Zahlenbeispiel. Kap. XLIV = Nipsus, Aufgabe 3. Kap. XLVI = Nipsus, Aufgabe 5 abzuschreiben angefangen, dann Unsinn. Kap. XLVII = Epaphroditus, § 1, von Item ad chatetum . . . an, dann § 6. Kap. XLVIII = Epaphr. § 2. Kap. XLIX = Epaphr. § 3. Kap. L = Epaphr. § 11. Kap. LI = Epaphr. § 13. Kap. LIII = Epaphr. § 7. Kap. LIV = Heron 82, 30—83, 9 = Boetius 417, 3—12. Kap. LV = Epaphr. § 15, 5, 17—24. Kap. LVI = Epaphr. § 27. Kap. LVII = Epaphr. § 28. Kap. LIX = Epaphr. § 30. Kap. LX = Epaphr. § 17—24. Kap. LXI = Epaphr. § 35. Kap. LXII = Epaphr. § 17—24. Kap. LXIV = Boetius 424, 11—24. Kap. LXV = Epaphr. § 17—24. Kap. LXVI = Epaphr. § 16. Kap. LXVII = Alcuin XXI. Kap. LXVIII = Alcuin XXII. Kap. LXIX = Alcuin XXIII. Kap. LXX = Alcuin XXIV. Kap. LXXI = Alcuin XXV. Kap. LXXII = Alcuin XXVII. Kap. LXXIII = Alcuin XXVIII. Kap. LXXIV = Alcuin XXIX. Kap. LXXV = Alcuin XXX. Kap. LXXVI = Alcuin XXXI. Kap. LXXVII = Epaphr. § 26. Kap, LXXVIII = Heron 132, 1—6. Kap. LXXIX = Heron 123, 19—23 und 124, 17—19. Kap. LXXX = Epaphr. § 14. Kap. LXXXI = Epaphr. § 9. Kap. LXXXII = Heron 159, 20—21 und 154, 8—13, dann das Gerbert'sche Kap. XXXI nur mit anderen Worten. Kap. LXXXIV zweites Alinea = Heron 157, 24—158,4. Kap. LXXXIX = Heron 231, 25—29. Kap. XC = Heron 169, 30—170,10. Kap. XCIII und XCIV zuerst Marcianus Capella lib. VI, § 595—598 (ed. Kopp, pag. 408—500), dann Hyginus in den Röm. Feldm. I, 188, 13—190,12.

305) Vergl. Macrobius in somnium Scipionis I, VI, 36; I, VI, 40; II, XIV, 32 (ed. Janus 1848: pag. 44, 14; 45, 5; 195, 17).

306) Illa autem quae, obliqua iusum sive susum deducta, hebetis vel acuti anguli effectrix videtur *hypotenusa* id est obliqua sive *podismus* nominatur. (Olleris 417 oder Pez 25.)

307) Vergl. Olleris 419, 22 und 424, 19 oder Pez 28, 42 und 33, L. 3 v. u.

308) Quod autem interdum quaedam vel omnia latera huiusmodi orthogoniorum minutiis admistis solent proponi, neque enim sagacem geometren minutiandi solertiam decet ignorare, horum etiam re erit exempla subnotare.

309) Heron, Liber Geeponicus S. 231: *Μέτρησις ὀκταγώνου. Ἔστω ὀκτάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον καταγράψαι· ποίει τετράγωνον σχῆμα καὶ βλέπε αὐτοῦ τὴν διάγωνον· καὶ ὅταν εὕρῃς τὸ ἥμισυ τῆς διαγώνου, λάμβανε ἀπὸ γωνίας εἰς γωνίαν, καὶ εὑρίσκεις στῆσαι τὰς πλευράς.*

310) Geometriae Gerberti caput LXXXIX. Intra quadratum aequilaterum octogonum designare. Si volueris intra quadratum aequilaterum octogonum designare, diagonum medium sumas. His circinum spatiatum in angulo quadrati infigas, et in utroque latere punctum, quousque circulus pervenerit, facias, ac sic per singulos angulos perque latera percurras. Deinde a puncto in punctum angulis quadrati extra clausis semper lineam ducas, et octogonum habebis.

311) Zeitschr. Math. Phys. XX, Histor. literar. Abth. S. 5.

312) Darauf hat schon Mollweide in Zach's Monatl. Correspond. (vergl. unsere Anmerkung 131) in der Note zu S. 405 hingewiesen, doch scheint es nicht, als ob dieser Hinweis jemals verwerthet worden wäre.

313) Die betreffenden Stellen finden sich fol. 36 verso und 37 verso des Salzburger Codex und sind abgedruckt bei Pez als Cap. VI S. 138 und Kap. VII S. 139; über Kap. III (Codex fol. 34 recto, Pez 135—136) s. die folgende Anmerkung.

314) Vergl. Pez S. 135—136 mit der Ausgabe des Macrobius durch Janus (Quedlinburg und Leipzig 1848) Bd. I, S. 225 von Anfang bis S. 226 Z. 7.

315) Vergl. Jourdain, Recherches critiques sur l'age et l'origine des traductions latines d'Aristote. Nouvelle édition. Paris 1843. pag. 146. [Bei Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsche Uebersetzung, S. 592 Note 235 ist irrthümlich Jourdain, pag. 156 citirt].

316) Mathem. Beitr. z. Kulturl. d. Völker 341—354 und Zeitschr. Math. Phys. VIII, Literaturzeitung 41—47.

317) Vergl. Practica Geometriae composita a Leonardo pisano de filijs bonaccij anno M°CC°XX° (wo beiläufig bemerkt das Wort Praktische Geometrie, genauer gesagt Praktik der Geometrie zuerst vorzukommen scheint) abgedruckt in den Scritti di Leonardo Pisano (ed. Boncompagni) II, 94 lin. 32. Die in unserem Texte genannte Figur aus Ptolemäus vergl. ebenda pag. 97 am Rande.

318) Distinctio quarta de divisione camporum inter consortes (Leon. Pisano II, 110—148).

319) Non enim mensurantur montes secundum superficies apparentes in eis; cum domus, et edificia, arbores, nec non et semina non secundum rectum angulum super ipsas superficies eleventur. Unde queruntur embada ipsorum planorum, super que apparentes superficies montium iacent: et super que plana predicta omnia secundum rectum angulum elevantur. (Leon. Pisano II, 107.)

320) Primus enim modus: et quo sapientes agrimensores utuntur etc. (Leon. Pisano II, 107.)

321) Sapientes vero antiqui ordinabant cum arundinibus triangulum similem in hunc modum etc. (Leon. Pisano II, 108.)

322) Incipit septima distinctio de inventione altitudinum rerum elevatarum et profunditatum atque longitudinum planitierum. (Leon. Pisano II, 202—206.)

323) Leonardo II, 202, 29—203, 25 = Gerbert XXXV. L. 203, 36 bis 204, 5 = G. XL. L. 204, 5—204, 21 = G. XXXI. L. 204, 21—206 am Ende = G. XVI.

324) Drobisch, De Joannis Widmanni Egerani compendio etc. Leipzig 1840. S. 29—33.

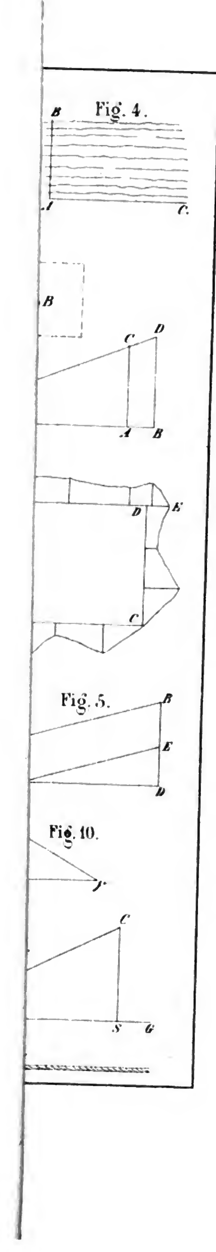
325) Drobisch l. c. S. 15 in der Anmerkung hat mit Berufung auf Panzer dieses richtige Druckjahr der ersten Ausgabe der Margaritha Philosophica anderen irrigen Angaben gegenüber festgestellt.

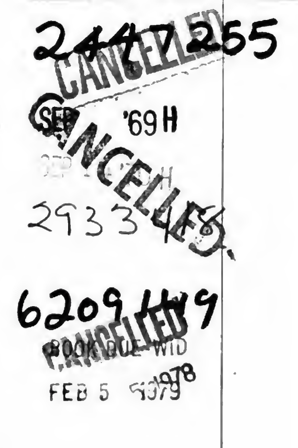
326) Discipulus: Basis quid est? Magister: Est linea figurae planae quae tota iacet in fundamento sive plano. Linea vero huic aequaliter superposita dicitur corauscus.

327) Vergl. Ziegler, Regiomontanus ein geistiger Vorläufer des Columbus. Dresden 1874. S. 93 flgg., wo die Beweisstellen dafür abgedruckt sind, dass Regiomontanus den Jacobsstab erfunden habe.

Sachverzeichniss

(mit Ausschluss der Anmerkungen).


Fig. 4.
B
C.
B
C
D
A
B
D
E
C
Fig. 5.
B
E
D
Fig. 10.
C
S
G


2447255
CANCELLED
SEP '69 H
CANCELLED
2933475
6209149
CANCELLED
BOOK DUE WID
FEB 5 1979

